

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2017-08-17 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. (a) Bestäm den allmänna \mathcal{C}^1 -lösningen $z(x, y)$ till differentialekvationen

$$y z'_y - x z'_x = 2xy^3 \quad (x > 0, y > 0),$$

t.ex. med hjälp av variabelbytet $u = xy$, $v = y$.

- (b) Bestäm de lösningar som uppfyller $z(x, 1) = x^2$.

- (c) Bestäm de lösningar som uppfyller $z(x, x) = x^2$.

2. Beräkna $\iint_D \sqrt{(3y-x)(2+y-x)} dx dy$, där D är triangeln med hörn i $(x, y) = (0, 0)$, $(3, 1)$ och $(2, 2)$.

3. Beräkna $\iiint_D xyz dx dy dz$, där D ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$, $z \leq 0$ och $y \geq x \geq 0$.

4. Bestäm konstanten k så att planet $2x - 2y + z = 0$ tangerar ytan $x = y \ln z + k$.

5. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y, z) = y^2 + xz - 2x$ då $x^2 + y^2 \leq z + 10$ och $z \leq -2$, om sådana finns.

6. Låt $f(x, y) = \frac{(x+y)^2 + x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ för $(x, y) \neq (0, 0)$ och $f(0, 0) = 1$.

- (a) Undersök om f är kontinuerlig i $(0, 0)$.

- (b) Beräkna derivatorna $f'_x(0, 0)$ och $f'_y(0, 0)$ (om de existerar).

- (c) För $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, beräkna riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(0, 0)$ (om den existerar).

7. Antag att $f(x, y)$ har Maclaurinutvecklingen

$$f(h, k) = f(0, 0) + Q(h, k) + \mathcal{O}((h^2 + k^2)^{3/2}),$$

där $Q(h, k)$ är en **positivt semidefinit** kvadratisk form. Kan då följande inträffa? Svara ja (med tydligt exempel) eller nej (med tydligt motbevis) i varje deluppgift för sig.

- (a) f har **strängt lokalt minimum** i origo.

- (b) f har **varken lokalt maximum eller lokalt minimum** i origo.

- (c) f har **strängt lokalt maximum** i origo.

Tentamen i 9GMA08 Matematik: Flervariabelanalys

2017-08-17 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/14 poäng med minst 3/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg G/VG. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. (a) Bestäm den allmänna \mathcal{C}^1 -lösningen $z(x, y)$ till differentialekvationen

$$y z'_y - x z'_x = 2xy^3 \quad (x > 0, y > 0),$$

t.ex. med hjälp av variabelbytet $u = xy$, $v = y$.

- (b) Bestäm de lösningar som uppfyller $z(x, 1) = x^2$.

- (c) Bestäm de lösningar som uppfyller $z(x, x) = x^2$.

2. Beräkna $\iint_D \sqrt{(3y-x)(2+y-x)} dx dy$, där D är triangeln med hörn i $(x, y) = (0, 0)$, $(3, 1)$ och $(2, 2)$.

3. Beräkna $\iiint_D xyz dx dy dz$, där D ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$, $z \leq 0$ och $y \geq x \geq 0$.

4. Bestäm konstanten k så att planet $2x - 2y + z = 0$ tangerar ytan $x = y \ln z + k$.

5. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y, z) = y^2 + xz - 2x$ då $x^2 + y^2 \leq z + 10$ och $z \leq -2$, om sådana finns.

6. Låt $f(x, y) = \frac{(x+y)^2 + x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ för $(x, y) \neq (0, 0)$ och $f(0, 0) = 1$.

- (a) Undersök om f är kontinuerlig i $(0, 0)$.

- (b) Beräkna derivatorna $f'_x(0, 0)$ och $f'_y(0, 0)$ (om de existerar).

- (c) För $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, beräkna riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(0, 0)$ (om den existerar).

7. Antag att $f(x, y)$ har Maclaurinutvecklingen

$$f(h, k) = f(0, 0) + Q(h, k) + \mathcal{O}((h^2 + k^2)^{3/2}),$$

där $Q(h, k)$ är en **positivt semidefinit** kvadratisk form. Kan då följande inträffa? Svara ja (med tydligt exempel) eller nej (med tydligt motbevis) i varje deluppgift för sig.

- (a) f har **strängt lokalt minimum** i origo.

- (b) f har **varken lokalt maximum eller lokalt minimum** i origo.

- (c) f har **strängt lokalt maximum** i origo.

Tentamen i 9MAA11/12 Flervariabelanalys

2017-08-17 kl. 14.00–19.00

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/14 poäng med minst 3/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg G/VG. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. (a) Bestäm den allmänna \mathcal{C}^1 -lösningen $z(x, y)$ till differentialekvationen

$$y z'_y - x z'_x = 2xy^3 \quad (x > 0, y > 0),$$

t.ex. med hjälp av variabelbytet $u = xy$, $v = y$.

- (b) Bestäm de lösningar som uppfyller $z(x, 1) = x^2$.

- (c) Bestäm de lösningar som uppfyller $z(x, x) = x^2$.

2. Beräkna $\iint_D \sqrt{(3y-x)(2+y-x)} dx dy$, där D är triangeln med hörn i $(x, y) = (0, 0)$, $(3, 1)$ och $(2, 2)$.

3. Beräkna $\iiint_D xyz dx dy dz$, där D ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$, $z \leq 0$ och $y \geq x \geq 0$.

4. Bestäm konstanten k så att planet $2x - 2y + z = 0$ tangerar ytan $x = y \ln z + k$.

5. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y, z) = y^2 + xz - 2x$ då $x^2 + y^2 \leq z + 10$ och $z \leq -2$, om sådana finns.

6. Låt $f(x, y) = \frac{(x+y)^2 + x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ för $(x, y) \neq (0, 0)$ och $f(0, 0) = 1$.

- (a) Undersök om f är kontinuerlig i $(0, 0)$.

- (b) Beräkna derivatorna $f'_x(0, 0)$ och $f'_y(0, 0)$ (om de existerar).

- (c) För $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, beräkna riktningssderivatan $f'_{\mathbf{v}}(0, 0)$ (om den existerar).

7. Antag att $f(x, y)$ har Maclaurinutvecklingen

$$f(h, k) = f(0, 0) + Q(h, k) + \mathcal{O}((h^2 + k^2)^{3/2}),$$

där $Q(h, k)$ är en **positivt semidefinit** kvadratisk form. Kan då följande inträffa? Svara ja (med tydligt exempel) eller nej (med tydligt motbevis) i varje deluppgift för sig.

- (a) f har **strängt lokalt minimum** i origo.

- (b) f har **varken lokalt maximum eller lokalt minimum** i origo.

- (c) f har **strängt lokalt maximum** i origo.

Lösningsskisser till TATA43, 9GMA08, 9MAA11/12
Flervariabelanalys 2017-08-17

1. (a) Sätt $u = xy$, $v = y$. Kedjeregeln ger $z'_x = y z'_u$ och $z'_y = x z'_u + z'_v$, så den givna PDE:n $y z'_y - x z'_x = 2xy^3$ är ekvivalent med

$$v z'_v = 2uv^2 \quad (u > 0, v > 0).$$

Alltså: $z'_v = 2uv$, så att $z = uv^2 + g(u) = xy^3 + g(xy)$.

Svar: $z(x, y) = xy^3 + g(xy)$, där g är en godtycklig C^1 -funktion av en variabel.

- (b) Insättning av $y = 1$ i lösningen från (a) ger $x^2 = z(x, 1) = x + g(x)$, dvs. $g(x) = x^2 - x$.

Svar: $z(x, y) = xy^3 + (xy)^2 - xy$.

- (c) Insättning av $y = x$ istället ger $x^2 = z(x, x) = x^4 + g(x^2)$, dvs. $g(t) = t - t^2$ (för $t \geq 0$).

Svar: $z(x, y) = xy^3 + xy - (xy)^2$.

2. Med variabelbytet $u = 3y - x$, $v = 2 + y - x$ fås en ny triangel E med hörn i $(u, v) = (0, 2)$, $(0, 0)$ och $(4, 2)$. (Observera att u och v är ickenegativa i E , så att vi kan använda regeln $\sqrt{uv} = \sqrt{u}\sqrt{v}$ nedan.) Från $\left| \frac{d(u,v)}{d(x,y)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right| = |2| = 2$ fås $dudv = 2 dx dy$, och alltså

$$\begin{aligned} & \iint_D \sqrt{(3y-x)(2+y-x)} dx dy \\ &= \iint_E \sqrt{uv} \frac{dudv}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_{v=0}^2 \sqrt{v} \left(\int_{u=0}^{2v} \sqrt{u} du \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{v=0}^2 \sqrt{v} \cdot \frac{2}{3} (2v)^{3/2} dv \\ &= \frac{2^{3/2}}{3} \left[\frac{v^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^{3/2+3}}{9} = \frac{16\sqrt{2}}{9}. \end{aligned}$$

3. Notera att svaret måste bli negativt, eftersom integranden xyz är negativ i (det inre av) integrationsområdet D .

I rymdpolära koordinater fås ett nytt område E med gränser $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ och $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$, alltså

$$\begin{aligned} \iiint_D xyz \, dx dy dz &= \iiint_E r \cos \varphi \sin \theta \cdot r \sin \varphi \sin \theta \cdot r \cos \theta \cdot r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^{\sqrt{2}} r^5 \, dr \right) \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3 \theta \cos \theta \, d\theta \right) \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \right) \\ &= \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{\sin^4 \theta}{4} \right]_{\pi/2}^{\pi} \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \frac{8-0}{6} \cdot \frac{0-1}{4} \cdot \frac{1-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Det går också bra att räkna direkt i de ursprungliga koordinaterna, om man så föredrar:

$$\iiint_D xyz \, dx dy dz = \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=x}^{\sqrt{2-x^2}} \left(\int_{z=-\sqrt{2-x^2-y^2}}^0 xyz \, dz \right) dy \right) dx = -\frac{1}{12}.$$

Svar: $-1/12$.

4. Låt $f(x, y, z) = x - y \ln z$ (för $z > 0$), så att ytans ekvation är $f(x, y, z) = k$. I den sökta tangeringspunkten (a, b, c) ska ytans normalvektor $\nabla f(a, b, c)$ vara parallell med normalvektorn till planet $2x - 2y + z = 0$, dvs.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\ln c \\ -b/c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

för någon konstant λ . Jämförelse av x -koordinaterna ger direkt $\lambda = 1/2$, och då blir $\ln c = 1$ och $b/c = -1/2$, alltså $c = e$ och $b = -e/2$. Punkten (a, b, c) ska ligga i planet $2x - 2y + z = 0$, vilket ger $a = \frac{1}{2}(2b - c) = -e$, och det sökta k -värdet fås slutligen ur

$$k = f(a, b, c) = f(-e, -e/2, e) = -e - (-e/2) \cdot 1 = -e/2.$$

Svar: $k = -e/2$.

5. De två bivillkoren $g = x^2 + y^2 - z - 10 \leq 0$ och $h = z + 2 \leq 0$ bestämmer en sluten delmängd av en sluten paraboloid – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x, y) = y^2 + xz - 2x$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

Vi får $\nabla f = (z - 2, 2y, x)$, $\nabla g = (2x, 2y, -1)$ och $\nabla h = (0, 0, 1)$.
Kandidatjakt:

- *Inre punkter:* $g < 0, h < 0$: $\nabla f = 0$ ger $(x, y, z) = (0, 0, 2) \Rightarrow h(0, 0, 2) = 4 \not\leq 0$, tillhör ej mängden.
- *Kandidater i ytan $g = 0$ och $h < 0$* finns där $\nabla f \parallel \nabla g$, d.v.s. när $\nabla f \times \nabla g = 0$:

$$\begin{cases} \nabla f \times \nabla g = 0 \\ g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)y = 0 \\ z = 2 - 2x^2 \\ x^2 + y^2 - z - 10 = 0 \end{cases}$$

a) $x = -1$ ger $z = 0$ och $y = \pm 3$ med $h(-1, -3, 0) = h(-1, 3, 0) = 2 \not\leq 0$, tillhör ej mängden.

b) $y = 0$ ger $x = \pm 2$ och $z = -6$ med $h(-2, 0, -6) = h(2, 0, -6) = -4 < 0$, därav två kandidater: $f(-2, 0, -6) = 16$ och $f(2, 0, -6) = -16$

- *Kandidater i ytan $h = 0$ och $g < 0$* finns där $\nabla f \parallel \nabla h$, d.v.s. när $\nabla f \times \nabla h = 0$:

$$\begin{cases} \nabla f \times \nabla h = 0 \\ h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 \\ y = 0 \\ z = -2 \end{cases}$$

saknar lösningar.

- *Randpunkter:* $h = 0$ och $g = 0$ finns där $\det(\nabla f, \nabla g, \nabla h) = 0$:

$$\begin{vmatrix} z-2 & 2y & x \\ 2x & 2y & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2y(z-2) - 4xy = 2y(z-2x-2) = 0$$

a) $y = 0$ ger $h = z + 2 = 0$ och $g = x^2 - z - 10 = 0$, alltså $(\pm 2\sqrt{2}, 0, -2)$, vilket ger två kandidater: $f(-2\sqrt{2}, 0, -2) = 8\sqrt{2}$

och $f(2\sqrt{2}, 0, -2) = -8\sqrt{2}$.

b) $z = 2x + 2, z + 2 = 0$ och $x^2 + y^2 - z = 10$ ger $(-2, \pm 2, -2)$, vilket ger ytterligare två kandidater: $f(-2, 2, -2) = f(-2, -2, -2) = 12$.

Svar: Max: $f(-2, 0, -6) = 16$ och Min: $f(2, 0, -6) = -16$

6. (a) För $t \neq 0$ är $f(t, t) = \frac{(2t)^2 + t^3 - t^3}{2t^2} = 2$, vilket inte går mot $f(0, 0) = 1$ då $t \rightarrow 0$.

Svar: f är inte kontinuerlig i $(0, 0)$.

- (b) Vi har

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{h^2 + h^3}{h^2} - 1 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

(Kan även ses såhär: $f(x, 0) = x + 1$ för alla $x \in \mathbf{R}$, inklusive $x = 0$, så $f'_x(x, 0) = \frac{d}{dx}(x + 1) = 1$ för alla $x \in \mathbf{R}$, inklusive $x = 0$.)

På liknande sätt fås $f'_y(0, 0) = -1$.

Svar: $f'_x(0, 0) = 1$ och $f'_y(0, 0) = -1$.

- (c) Riktningensderivatan $f'_{\mathbf{v}}(0, 0)$ är $g'(0)$, där $g(t) = f(t\mathbf{v})$. Men vi såg ju i (a) att funktionen

$$g(t) = f(t\mathbf{v}) = f(t/\sqrt{2}, t/\sqrt{2}) = \begin{cases} 2, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

inte är kontinuerlig i $t = 0$, och alltså än mindre deriverbar där.

Svar: Derivatans $f'_{\mathbf{v}}(0, 0)$ i riktningen $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ existerar inte.

7. Svaret är **ja** i alla tre fallen. Exempel:

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^4$ har strängt lokalt (och t.o.m. globalt) minimum i origo, eftersom $f(0, 0) = 0$ och $f(x, y) > 0$ (uppenbart) för alla $(x, y) \neq (0, 0)$. Den kvadratiske formen i Maclaurinutvecklingen är i detta fall $Q(h, k) = h^2$, prototypen för en positivt semidefinit kvadratisk form.
- (b) $f(x, y) = x^2 - y^4$ har varken lokalt maximum eller lokalt minimum i origo, eftersom $f(0, 0) = 0$ och varje omgivning av origo innehåller både punkter där f är negativ och där f är positiv: $f(x, 0) = x^2 > 0$ om $x \neq 0$, och $f(0, y) = -y^4 < 0$ om $y \neq 0$. Även här är $Q(h, k) = h^2$.
- (c) $f(x, y) = -x^4 - y^4$ har strängt lokalt (och t.o.m. globalt) maximum i origo. I detta fall är $Q(h, k) = 0$, vilket faktiskt är en positivt semidefinit form, eftersom den uppfyller de villkor som krävs: $Q(h, k) \geq 0$ för alla (h, k) , och det finns $(h, k) \neq (0, 0)$ där $Q(h, k) = 0$. (Denna form är även negativt semidefinit; det är den enda kvadratiske formen som tillhör två olika kategorier.)