Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2017-01-03 kl 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare). 8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för
$$f(x,y) = 2x - 4y + (x+y)^2 - 12\arctan x\,.$$

2. Beräkna
$$\iint_D y^2 dxdy\,,$$
där D ges av $x+y \leq 0\,,\ y \geq 0$ och $x^2+3y^2 \leq 12\,.$

3. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av
$$4x+3y+2z$$
då $0 \leq z \leq 1-x^2-y^2\,.$

4. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-lösningar $z(x,y)$ till differentialekvationen
$$3z''_{xx} + 5z''_{xy} - 2z''_{yy} = 0\,,$$
under bivillkoret $z(x,0) = x^2$, genom att t.ex. göra variabelbytet $u = x+3y$, $v = 2x-y$.

5. Beräkna volymen av den kropp i $\mathbb{R}^3$ som ges av $x \geq 0\,,\ 0 \leq y \leq 3\,,$ $z \geq 0$ och $x^2+y+z \leq 4\,.$

6. Låt K_R vara klotet $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$. Bestäm alla värden som integralen
$$\iiint_{K_R} (x^4+y^4+z^4-1)\,dxdydz$$
kan anta för $R > 0$.

7. (a) Visa att avbildningen
$$\begin{cases} u = x^3+y^3+z^3 \\ v = x^2+y^2+z^2 \\ w = x+y+z \end{cases}$$
inte är globalt inverterbar.

   (b) Ange kring vilka punkter $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ som avbildningen har en lokal $\mathcal{C}^1$-invers.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2017-01-03

1. Stationära punkter ges av $\nabla f = \big(2+2(x+y)-12/(1+x^2), -4+2(x+y)\big) = (0,0)$, d.v.s. $x+y=2$ och $12/(1+x^2)=6$. Ur detta fås att $(x,y)=(1,1)$ eller $(x,y)=(-1,3)$. Andraderivatorna är $f''_{xx} = 2+24x(1+x^2)^{-2}$, $f''_{xy}=2$ och $f''_{yy}=2$, vilket på vanligt vis ger de kvadratiska formerna

$$Q_{(1,1)}(h,k) = 8h^2+4hk+2k^2 = 2(k+h)^2+6h^2$$

och

$$Q_{(-1,3)}(h,k) = -4h^2+4hk+2k^2 = 2(k+h)^2-6h^2.$$

Standardresonemang visar att den första är **positivt definit** och den andra är **indefinit**, så f har (strängt) lokalt minimum i $(1,1)$ men inget lokalt extremvärde i $(-1,3)$.

Svar: $(1,1)$ är en lokal minimipunkt för f. Lokala maximipunkter saknas.

2. Variabelbytet $x = 2\sqrt{3}\,u$, $y=2v$ ger ett nytt område E som definieras av $0 \le v \le -\sqrt{3}\,u$ och $u^2+v^2 \le 1$ (rita figur i uv-planet!). Planpolära koordinater $u=\rho\cos\varphi$, $v=\rho\sin\varphi$ ger därefter

$$\iint_D y^2\,dxdy = \iint_E 4v^2\cdot 4\sqrt{3}\,dudv = 16\sqrt{3}\int_{\varphi=2\pi/3}^{\pi}\int_{\rho=0}^{1}(\rho\sin\varphi)^2\rho\,d\rho d\varphi$$
$$= 16\sqrt{3}\cdot\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\cdot\left[\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{2\pi/3}^{\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}-\frac{3}{2}.$$

3. Bivillkoren $g(x,y,z)=x^2+y^2+z\le 1$ och $h(x,y,z)=z\ge 0$ bestämmer en sluten och begränsad del av en fylld paraboloid (rita figur!) – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y,z) = 4x+3y+2z$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

Vi får $\nabla f=(4,3,2)$, $\nabla g=(2x,2y,1)$ och $\nabla h=(0,0,1)$. Kandidatjakt:

- Kandidater i kroppen $g<1$, $h>0$ saknas eftersom $\nabla f \ne \mathbf{0}$ överallt.
- Kandidater på ytan $g<1$, $h=0$ saknas också eftersom $\nabla f \nparallel \nabla h$ överallt.
- Kandidater på ytan $g=1$, $h>0$ finns där

$$\nabla f \parallel \nabla g \quad\Leftrightarrow\quad 2x/4 = 2y/3 = 1/2 \quad\Leftrightarrow\quad x=1,\ y=3/4,$$

  som insatt i $g=1$ ger $z=-9/16$ och därmed punkten $(1,3/4,-9/16)$, som dock inte uppfyller $h>0$. Ingen kandidat här heller.
- Kandidater på kurvan $g=1$, $h=0$, slutligen, finns där $\{\nabla f,\nabla g,\nabla h\}$ är linjärt beroende, d.v.s. där

$$0 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2x & 2y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8y-6x \quad\Leftrightarrow\quad y=3x/4,$$

  som insatt i $g=1$ och $h=0$ ger kandidaterna $f(4/5,3/5,0)=5$ och $f(-4/5,-3/5,0)=-5$.

Svar: $f_{\max} = f(4/5,3/5,0)=5$, $f_{\min} = f(-4/5,-3/5,0) = -5$.

4. Variabelbytet $u = x + 3y$ och $v = 2x - y$ ger med kedjeregeln

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + 2z'_v \quad \text{och} \quad z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = 3z'_u - z'_v,$$

och sedan, i ett andra steg,

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= (z'_x)'_x = (z'_u + 2z'_v)'_x = (z'_u)'_x + 2(z'_v)'_x = z''_{uu} + 4z''_{uv} + 4z''_{vv}, \\ z''_{xy} &= (z'_x)'_y = (z'_u + 2z'_v)'_y = (z'_u)'_y + 2(z'_v)'_y = 3z''_{uu} + 5z''_{uv} - 2z''_{vv}, \\ z''_{yy} &= (z'_y)'_y = (3z'_u - z'_v)'_y = 3(z'_u)'_y - (z'_v)'_y = 9z''_{uu} - 6z''_{uv} + z''_{vv}. \end{aligned}$$

Insättning i differentialekvationen ger efter förenkling $49z''_{uv} = 0$, d.v.s. $z''_{uv} = 0$. Integreringar ger först $z'_u = f(u)$ och sedan $z = F(u) + G(v)$, där F och G är $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel ($F' = f$).

Differentialekvationens allmänna lösning är således $z(x, y) = F(x + 3y) + G(2x - y)$.

Bivillkoret ger nu $x^2 = z(x, 0) = F(x) + G(2x)$, d.v.s. $F(t) = t^2 - G(2t)$, $t \in \mathbf{R}$, och därmed ges alla lösningar av $z(x, y) = (x + 3y)^2 - G(2x + 6y) + G(2x - y)$.

Svar: $z(x, y) = (x + 3y)^2 - G(2x + 6y) + G(2x - y)$, där G är en $\mathcal{C}^2$-funktion av en variabel.

5. Det finns många framkomliga sätt att beräkna volymen av denna kropp D. Man kan t.ex. använda stavar i z-led. Om man skriver olikheterna som $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 3$ och $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y$ så ser man direkt gränserna för z, och även att kroppens projektion på xy-planet, $\tilde{D}$, ges av $x \geq 0$, $0 \leq y \leq 3$ och $0 \leq 4 - x^2 - y$ (rita figur!).

$$\begin{aligned} \text{volym}(D) &= \iiint_D dxdydz = \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{z=0}^{4-x^2-y} dz \right) dxdy = \int_{y=0}^{3} \left(\int_{x=0}^{\sqrt{4-y}} (4 - y - x^2)\, dx \right) dy \\ &= \int_{y=0}^{3} \left[(4-y)x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{\sqrt{4-y}} dy = \frac{2}{3} \int_{y=0}^{3} (4-y)^{3/2} dy = \frac{4}{15} \left[-(4-y)^{5/2} \right]_{y=0}^{3} = \frac{124}{15}. \end{aligned}$$

6. Integralerna av x^4, y^4 och z^4 över klotet K_R är av symmetriskäl lika stora, och med hjälp av rymdpolära koordinater får vi

$$\iiint_{K_R} z^4\, dxdydz = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{R} (r\cos\theta)^4 r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi = 2\pi \cdot \left[-\frac{\cos^5\theta}{5} \right]_0^{\pi} \cdot \frac{R^7}{7} = \frac{4\pi R^7}{35}.$$

Alltså är

$$f(R) = \iiint_{K_R} (x^4 + y^4 + z^4 - 1)\, dxdydz = 3 \iiint_{K_R} z^4\, dxdydz - \text{volym}(K_R) = \frac{12\pi R^7}{35} - \frac{4\pi R^3}{3},$$

med derivatan

$$f'(R) = \frac{12\pi R^6}{5} - 4\pi R^2 = \frac{4\pi R^2}{5}(3R^4 - 5),$$

som är negativ för $0 < R < (5/3)^{1/4}$ och positiv för $R > (5/3)^{1/4}$. Funktionen $f(R)$, $R > 0$, har alltså globalt minimum

$$f\big((5/3)^{1/4}\big) = 4\pi \cdot (5/3)^{3/4} \left(\frac{5}{35} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{16\pi \cdot (5/3)^{3/4}}{21},$$

och $f(R) \to \infty$ då $R \to \infty$, eftersom R^7-termen dominerar.

Svar: Integralen antar alla värden i intervallet $\left[-\frac{16\pi \cdot (5/3)^{3/4}}{21}, \infty \right[$.

7. (a) T.ex. avbildas $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ och $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ båda på $(u, v, w) = (1, 1, 1)$.

(b) Funktionerna $u = x^3 + y^3 + z^3$, $v = x^2 + y^2 + z^2$ och $w = x + y + z$ är alla $\mathcal{C}^1$, och

$$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 6 \begin{vmatrix} x^2 & y^2 - x^2 & z^2 - x^2 \\ x & y - x & z - x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 6(y-x)(z-x)(y-z),$$

där vi i steg 1 har brutit ut faktorn 3 från rad 1 och faktorn 2 från rad 2 och sedan subtraherat kolonn 1 från kolonn 2 och kolonn 3, och i steg 2 har brutit ut faktorn $(y - x)$ ur kolonn 2 och $(z - x)$ ur kolonn 3.

Om $(x, y, z) = (a, b, c)$ är en punkt sådan att $a \neq b$, $b \neq c$ och $c \neq a$ är alltså funktionaldeterminanten $\neq 0$ där, och därför medför inversa funktionssatsen att det finns en lokal $\mathcal{C}^1$-invers $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ i någon omgivning till punkten (a, b, c).

I övriga punkter (a, b, c) är funktionaldeterminanten noll. Om det trots det skulle finnas en lokal $\mathcal{C}^1$-invers $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ i någon omgivning till en sådan punkt (a, b, c) så vore

$$\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} \cdot \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = 1$$

i omgivningen, alltså även i punkten $(x, y, z) = (a, b, c)$, vilket är en motsägelse eftersom $d(u, v, w)/d(x, y, z) = 0$ i (a, b, c). Alltså finns ingen lokal $\mathcal{C}^1$-invers där.

Svar: Alla punkter (x, y, z) där $x \neq y$, $y \neq z$ och $z \neq x$ samtidigt.