Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2016-10-22 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för
$$f(x, y, z) = x^4 + y^3 + z^2 + 2x^2 + 6yz.$$

2. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av
$$2x^2 + y^2 + y$$
då $x^2 + y^2 \leq 2$ och $x \leq -1$.

3. Beräkna
$$\iint_D \frac{dxdy}{81 + (2x - y)^2},$$
där D är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 2)$ och $(4, -1)$.

4. Låt
$$f(x, y) = x^3 - 3x^2y^5 + y.$$
Vilka av f:s nivåkurvor tangerar linjen $y = 1$?

5. Beräkna
$$\iiint_D x^2\, dxdydz,$$
där D är den mängd i $\mathbf{R}^3$ som ges av olikheterna
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad x \leq 0, \quad x + \sqrt{3}\, y \leq 0, \quad z \geq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

6. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-lösningar $z(x, y)$ till differentialekvationen
$$4x^2 z''_{xx} + 4xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} + 2xz'_x = x, \qquad x > 0,$$
under bivillkoren $z(1, y) = 0$ och $z(9, y) = e^y$, genom att t.ex. göra variabelbytet $u = y/\sqrt{x}$, $v = \sqrt{x}$.

7. Visa att ekvationen
$$x^y = x + y - 3$$
definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y(x)$ i en omgivning till punkten $(x, y) = (1, 3)$, och beräkna Taylorutvecklingen av ordning 2 för $y(x)$ kring punkten $x = 1$. Hur ser man att funktionen faktiskt blir av klass $\mathcal{C}^3$, så att den kan Taylorutvecklas så långt?

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2016-10-22

1. Stationära punkter ges av $\nabla f = (4x^3 + 4x, 3y^2 + 6z, 2z + 6y) = (0, 0, 0)$, dvs. $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ eller $(x, y, z) = (0, 6, -18)$. Ur andraderivatorna fås de kvadratiska formerna

$$Q_{(0,0,0)}(h, k, l) = 4h^2 + 2l^2 + 12kl = 4h^2 + 2(l + 3k)^2 - 18k^2$$

och

$$Q_{(0,6,-18)}(h, k, l) = 4h^2 + 36k^2 + 2l^2 + 12kl = 4h^2 + 2(l + 3k)^2 + 18k^2.$$

Man visar med standardresonemang att den första är indefinit och den andra positivt definit, varav det följer att $(0, 0, 0)$ inte är någon lokal extrempunkt, medan $(0, 6, -18)$ är en lokal minimipunkt.

Svar: f har lokalt minimum i $(0, 6, -18)$.

2. Bivillkoren $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 2$ och $h(x, y) = x \leq -1$ bestämmer en sluten delmängd av en cirkelskiva (rita figur!) – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + y$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

Vi får $\nabla f = (4x, 2y + 1)$, $\nabla g = (2x, 2y)$ och $\nabla h = (1, 0)$. Kandidatjakt:

- Kandidater på ytan $g < 2$, $h < -1$ finns där $\nabla f = (4x, 2y + 1) = \mathbf{0}$, d.v.s. där $(x, y) = (0, -1/2)$, men där är $h \not< -1$. Ingen kandidat här.
- Kandidater på cirkelbågen $g = 2$, $h < -1$ finns där $\nabla f \parallel \nabla g$, d.v.s. där

$$0 = \begin{vmatrix} 4x & 2y + 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2x(2y - 1) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \quad \text{eller} \quad y = 1/2,$$

men eftersom $h = x < -1$ ser vi att $x \neq 0$ och endast fallet $y = 1/2$ återstår. Insättning i $g = 2$ ger $x^2 = 7/4$ och därmed de två punkterna $(\pm\sqrt{7}/2, 1/2)$, men kontroll mot $h < -1$ ger endast kandidaten $f(-\sqrt{7}/2, 1/2) = 17/4$.
- Kandidater på sträckan $g < 2$, $h = -1$ finns där $\nabla f \parallel \nabla h$, d.v.s. där $2y + 1 = 0$, alltså $y = -1/2$, vilket efter kontroll mot $g < 2$ ger kandidaten $f(-1, -1/2) = 7/4$.
- Lösning av ekvationssystemet $g = 2$, $h = -1$ ger slutligen kandidaterna $f(-1, 1) = 4$ och $f(-1, -1) = 2$ (hörnpunkterna).

Svar: $f_{\max} = f(-\sqrt{7}/2, 1/2) = 17/4$, $f_{\min} = f(-1, -1/2) = 7/4$.

3. Man kan t.ex. göra det linjära variabelbytet $\binom{x}{y} = u\binom{1}{2} + v\binom{4}{-1}$, dvs. $x = u + 4v$, $y = 2u - v$. Detta ger en ny triangel E i uv-planet, med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$. Determinanten $\dfrac{d(x, y)}{d(u, v)} = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -9$ ger $dxdy = |-9|\, dudv$, och alltså

$$\iint_D \frac{dxdy}{81 + (2x - y)^2} = \iint_E \frac{9\, dudv}{81 + (9v)^2} = \frac{1}{9} \int_{v=0}^{1} \left(\int_{u=0}^{1-v} \frac{du}{1 + v^2} \right) dv$$
$$= \frac{1}{9} \int_0^1 \frac{1 - v}{1 + v^2}\, dv = \frac{1}{9} \left[\arctan v - \frac{1}{2} \ln(1 + v^2) \right]_0^1 = \frac{1}{9} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \right).$$

4. Som bekant är gradienten $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 6xy^5, -15x^2y^4 + 1)$ vinkelrät mot nivåkurvan genom punkten (x, y). I en punkt $(x, y) = (a, 1)$ på linjen $y = 1$ måste därmed gradienten vara riktad i y-led för att nivåkurvan ska tangera linjen, alltså

$$\nabla f(a, 1) = (3a^2 - 6a, -15a^2 + 1) \parallel (0, 1),$$

vilket är fallet om och endast om $3a^2 - 6a = 0$. Detta ger $a = 0$ eller $a = 2$, så nivåkurvorna genom $(0, 1)$ och $(2, 1)$ tangerar linjen. Insättning av dessa punkter i formeln för $f(x, y)$ ger $f(0, 1) = 1$ och $f(2, 1) = -3$.

Svar: Nivåkurvorna $f(x, y) = 1$ och $f(x, y) = -3$.

(Om man ska vara noggrann bör man även påpeka att $\nabla f(0, 1)$ och $\nabla f(2, 1)$ inte är nollvektorn, eftersom $-15a^2 + 1 \neq 0$ då $a = 0$ eller $a = 2$. Detta villkor garanterar ju, via implicita funktionssatsen, att nivåmängden verkligen är en *kurva* i närheten av respektive punkt.)

5. I rymdpolära koordinater fås ett nytt område E som ges av $0 \le r \le 2$, $5\pi/6 \le \phi \le 3\pi/2$ och $0 \le \theta \le \pi/4$, alltså

$$\begin{aligned}
\iiint_D x^2\,dxdydz &= \iiint_E (r\cos\phi\sin\theta)^2 \cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi \\
&= \left(\int_0^2 r^4\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/4}\sin^3\theta\,d\theta\right)\left(\int_{5\pi/6}^{3\pi/2}\cos^2\phi\,d\phi\right) \\
&= \left(\int_0^2 r^4\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/4}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_{5\pi/6}^{3\pi/2}\frac{1+\cos 2\phi}{2}\,d\phi\right) \\
&= \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2\left[-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/4}\left[\frac{\phi}{2}+\frac{\sin 2\phi}{4}\right]_{5\pi/6}^{3\pi/2} \\
&= \frac{32}{5}\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right).
\end{aligned}$$

Svar: $\dfrac{(8-5\sqrt{2})(8\pi+3\sqrt{3})}{45}$.

(Svaret måste uppenbart bli positivt eftersom vi integrerar $f(x,y) = x^2 \ge 0$, och man kan se att det blev positivt eftersom $\sqrt{2} = 1{,}41\ldots < 1{,}6 = 8/5$.)

6. Variabelbytet $u = y/\sqrt{x} = x^{-1/2}y$ och $v = \sqrt{x} = x^{1/2}$ ger med kedjeregeln

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = (-x^{-3/2}y/2)z'_u + (x^{-1/2}/2)z'_v \quad \text{och} \quad z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = x^{-1/2}z'_u,$$

och sedan, i ett andra steg,

$$\begin{aligned}
z''_{xx} &= (z'_x)'_x = (3x^{-5/2}y/4)z'_u + (-x^{-3/2}y/2)(z'_u)'_x + (-x^{-3/2}/4)z'_v + (x^{-1/2}/2)(z'_v)'_x \\
&= (3x^{-5/2}y/4)z'_u - (x^{-3/2}/4)z'_v + (x^{-3}y^2/4)z''_{uu} - (x^{-2}y/2)z''_{uv} + (x^{-1}/4)z''_{vv}, \\
z''_{xy} &= z''_{yx} = (z'_y)'_x = (-x^{-3/2}/2)z'_u + x^{-1/2}(z'_u)'_x \\
&= -(x^{-3/2}/2)z'_u - (x^{-2}y/2)z''_{uu} + (x^{-1}/2)z''_{uv}, \\
z''_{yy} &= (z'_y)'_y = x^{-1/2}(z'_u)'_y = x^{-1}z''_{uu}.
\end{aligned}$$

Insättning i differentialekvationen ger efter förenkling $xz''_{vv} = x$, d.v.s. $z''_{vv} = 1$, eftersom $x > 0$. Integreringar m.a.p. v ger först $z'_v = v + f(u)$ och sedan $z = v^2/2 + vf(u) + g(u)$, där f och g är $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel.

Differentialekvationens allmänna lösning är således $z(x,y) = x/2 + \sqrt{x}\,f(y/\sqrt{x}) + g(y/\sqrt{x})$.

Bivillkoren ger nu $0 = z(1,y) = 1/2 + f(y) + g(y)$ och $e^y = z(9,y) = 9/2 + 3f(y/3) + g(y/3)$ för $y \in \mathbf{R}$, d.v.s. följande båda ekvationer för funktionerna f och g:

$$f(t) + g(t) = -1/2 \quad \text{och} \quad 3f(t) + g(t) = e^{3t} - 9/2, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Vi får $f(t) = e^{3t}/2 - 2$ och $g(t) = 3/2 - e^{3t}/2$ och därmed $z(x,y) = x/2 + \sqrt{x}\,(e^{3y/\sqrt{x}}/2 - 2) + (3/2 - e^{3y/\sqrt{x}}/2) = (3 - 4\sqrt{x} + x)/2 + (\sqrt{x} - 1)e^{3y/\sqrt{x}}/2$.

Svar: $z(x,y) = \dfrac{3 - 4\sqrt{x} + x}{2} + \dfrac{\sqrt{x} - 1}{2}\,e^{3y/\sqrt{x}}$.

7. Sätt $F(x,y) = x^y - x - y$. Då är $F'_y(x,y) = x^y \ln x - 1$. Eftersom F är av klass $\mathcal{C}^1$, $F(1,3) = -3$ och $F'_y(1,3) = -1 \neq 0$ så är villkoren för implicita funktionssatsen uppfyllda, och den säger då att ekvationen $F(x,y) = -3$ implicit definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y(x)$ nära $(x,y) = (1,3)$, vilket skulle visas. Notera att $y(1) = 3$ per definition.

   Implicit derivering av sambandet $x^{y(x)} - x - y(x) = -3$ ger

$$x^{y(x)}\big(y'(x)\ln x + y(x)/x\big) - 1 - y'(x) = 0.$$

   (När man deriverar $x^{y(x)}$ får man tänka på att det betyder $e^{y(x)\ln x}$.) Om vi löser ut $y'(x)$ får vi

$$y'(x) = \frac{1 - y(x)x^{y(x)-1}}{x^{y(x)}\ln x - 1}.$$

   Här är uttrycket i högerledet av klass $\mathcal{C}^1$ (nära $x = 1$), eftersom vi vet att $y(x)$ är det, och eftersom vi inte dividerar med noll. Alltså är även vänsterledet $y'(x)$ av klass $\mathcal{C}^1$, vilket betyder att funktionen $y(x)$ själv är av klass $\mathcal{C}^2$.

   Vi övergår nu till att skriva y och y' istället för $y(x)$ och $y'(x)$, för enkelhets skull. Derivering av $y' \cdot (x^y \ln x - 1) = 1 - yx^{y-1}$ ger

$$\begin{aligned} y'' \cdot (x^y \ln x - 1) + y' \cdot \big(x^y(y'\ln x + y/x)\ln x + x^y/x\big) \\ = -y' \cdot x^{y-1} - y \cdot x^{y-1}(y'\ln x + (y-1)/x). \end{aligned}$$

   Om vi här löser ut $y''(x)$ får vi igen ett uttryck av klass $\mathcal{C}^1$, vilket betyder att $y(x)$ själv är av klass $\mathcal{C}^3$. (Man kan fortsätta på liknande sätt och visa att $y(x)$ rentav är av klass $\mathcal{C}^\infty$.)

   Insättning av $x = 1$ och $y(1) = 3$ i formeln för $y'(x)$ ger $y'(1) = (-2)/(-1) = 2$, och insättning av detta i formeln för $y''(x)$ ger $-y''(1) + 2 \cdot 1 = -2 - 3 \cdot 2$, alltså $y''(1) = 10$. Taylors formel ger nu utvecklingen av ordning 2 kring $x = 1$:

$$\begin{aligned} y(1+h) &= y(1) + y'(1)h + \frac{y''(1)h^2}{2!} + \mathcal{O}(h^3) \\ &= 3 + 2h + 5h^2 + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

   Svar: $y(1+h) = 3 + 2h + 5h^2 + \mathcal{O}(h^3)$.