Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2016-08-18 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-lösningar $z(x,y)$ till differentialekvationen
$$xz'_x - z'_y = xe^y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$
under bivillkoret $z(x,1) = x^2$, genom att t.ex. göra variabelbytet $u = xe^y$, $v = y$.

2. Beräkna
$$\iint_D y\,dxdy$$
där D ges av $-1 \leq x + y \leq x - 2y \leq 2$.

3. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av
$$x^2 + 3y^2$$
då $(x+1)^2 + y^2 \leq 5$ och $y \geq x$.

4. Låt
$$f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 6xy - 6xz + 8yz + 4z.$$
Är $(0,0,0)$ en lokal extrempunkt för f ? Är $(0,1,-1)$ det? Ange i så fall även om det är lokalt maximum eller lokalt minimum.

5. Bestäm för vilka värden på konstanten C som $x + 3y + z = C$ är ett tangentplan till ytan $x^4 + 32y^3z = 48$.

6. Beräkna
$$\iiint_D \frac{x/y}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^3}\,dxdydz$$
där D är den mängd i $\mathbb{R}^3$ som ges av olikheterna $0 < x < y$.

7. Låt $f(x,y) = \dfrac{x^2 + xy + y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ för $(x,y) \neq (0,0)$.

   (a) Bestäm $f(0,0)$ så att $f(x,y)$ blir kontinuerlig i $(0,0)$.

   (b) Avgör om $f'_x(0,0)$ och $f'_y(0,0)$ existerar.

   (c) För vilka vektorer $\bar{v}$ (med $|\bar{v}| = 1$) existerar $f'_{\bar{v}}(0,0)$?

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2016-08-18

1. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = e^y z'_u$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = xe^y z'_u + z'_v$, och insättning i differentialekvationen ger $-z'_v = xe^y$, d.v.s. $z'_v = -u$, som integrerad ger $z = -uv + g(u) = -xye^y + g(xe^y)$, där g är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel.

   Differentialekvationens allmänna lösning är således $z(x,y) = -xye^y + g(xe^y)$.

   Bivillkoret ger nu $x^2 = z(x,1) = -ex + g(ex)$, så $g(t) = t + (t/e)^2$. Således är $z(x,y) = -xye^y + xe^y + (xe^y/e)^2 = x^2e^{2y-2} - (y-1)xe^y$.

   Svar: $z(x,y) = x^2e^{2y-2} - (y-1)xe^y$.

2. Det linjära variabelbytet $\begin{cases} u = x+y, \\ v = x-2y, \end{cases}$ $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$, $dudv = \big|-3\big|\,dxdy = 3\,dxdy$,

   ger nytt område $E:\ -1 \le u \le v \le 2$, och, med upprepad integration,

$$\iint_D y\,dxdy = \iint_E \frac{u-v}{3}\frac{dudv}{3} = \frac{1}{9}\int_{-1}^{2}\left(\int_u^2 (u-v)\,dv\right)du = \frac{1}{9}\int_{-1}^{2}\left[-\frac{(u-v)^2}{2}\right]_{v=u}^{v=2} du$$
$$= -\frac{1}{18}\int_{-1}^{2}(u-2)^2\,du = -\frac{1}{18}\left[\frac{(u-2)^3}{3}\right]_{-1}^{2} = -\frac{1}{2}.$$

3. De två bivillkoren $g(x,y) = (x+1)^2 + y^2 \le 5$ och $h(x,y) = y - x \ge 0$ bestämmer en sluten del av en sluten cirkelskiva – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (2x, 6y)$, $\nabla g = (2x+2, 2y)$ och $\nabla h = (-1, 1)$. Kandidatjakt:

   - Kandidater i ytan $g < 5$, $h > 0$ finns där $\nabla f = \mathbf{0}$, d.v.s. där $(x,y) = (0,0)$, men $h(0,0) \not> 0$. Ingen kandidat här.
   - Kandidater på cirkelbågen $g = 5$, $h > 0$ finns där $\nabla f \parallel \nabla g$, d.v.s. där
   $$0 = \begin{vmatrix} 2x & 6y \\ 2x+2 & 2y \end{vmatrix} = -4(2x+3)y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -3/2 \text{ eller } y = 0.$$
   Fallet $x = -3/2$ insatt i $g = 5$ ger $y = \pm\sqrt{19}/2$, och kontroll mot $h > 0$ ger kandidaten $f(-3/2, \sqrt{19}/2) = 33/2$. Fallet $y = 0$ insatt i $g = 5$ ger $x = -1 \pm \sqrt{5}$, och kontroll mot $h > 0$ ger kandidaten $f(-1-\sqrt{5}, 0) = 6 + 2\sqrt{5}$.
   - Kandidater på sträckan $h = 0$, $g < 5$ finns där $\nabla f \parallel \nabla h$, d.v.s. där $x = -3y$, som insatt i $h = 0$ ger punkten $(0,0)$. Kontroll mot $g < 5$ ger kandidaten $f(0,0) = 0$.
   - Hörnpunkterna finns där $g = 5$, $h = 0$, och ur detta ekvationssystem får vi kandidaterna $f(1,1) = 4$ och $f(-2,-2) = 16$.

   Svar: $f_{\max} = f(-3/2, \sqrt{19}/2) = 33/2$, $f_{\min} = f(0,0) = 0$.

4. Stationära punkter för f bestäms av att

$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (3x^2 + 6x - 6y - 6z, 8y - 6x + 8z, 12z - 6x + 8y + 4) = (0,0,0).$$

   Eftersom $\nabla f(0,0,0) = (0,0,4)$ och $\nabla f(0,1,-1) = (0,0,0)$ ser vi att punkten $(0,0,0)$ inte är stationär för f och därmed inte kan vara en lokal extrempunkt för f medan däremot punkten $(0,1,-1)$ är stationär för f och därför skulle kunna vara det – vidare undersökning krävs.

   I punkten $(0,1,-1)$ blir andraderivatorna $f''_{xx} = 6x+6 = 6$, $f''_{xy} = -6$, $f''_{xz} = -6$, $f''_{yy} = 8$, $f''_{yz} = 8$ och $f''_{zz} = 12$, så vi får den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -6 & -6 \\ -6 & 8 & 8 \\ -6 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$$
$$= 6h^2 + 8k^2 + 12l^2 - 12hk - 12hl + 16kl = 6(h-k-l)^2 + 2(k+l)^2 + 4l^2,$$

som är positivt definit eftersom $Q(h,k,l) \geq 0$ för alla (h,k,l), och $Q(h,k,l) = 0$ endast om $h-k-l=0$, $k+l=0$ och $l=0$, d.v.s. endast om $(h,k,l)=(0,0,0)$. Alltså är punkten $(0,1,-1)$ en lokal minimipunkt för f.

Svar: $(0,0,0)$ är inte en lokal extrempunkt för f. $(0,1,-1)$ är en lokal minimipunkt för f.

5. Sätt $F(x,y,z) = x^4 + 32y^3z$; då är den givna ytan nivåytan $F(x,y,z) = 48$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a,b,c) på ytan är planet $x+3y+z=C$ precis då $\nabla F(a,b,c) \parallel (1,3,1)$, $F(a,b,c) = 48$ och $a+3b+c=C$, d.v.s. precis då

$$(4a^3, 96b^2c, 32b^3) \parallel (1,3,1), \quad a^4 + 32b^3c = 48 \quad \text{och} \quad a+3b+c=C.$$

Det första villkoret ger ekvationerna $a^3 = 8b^3$ (d.v.s. $a=2b$, ty $a,b \in \mathbf{R}$) och $b^2c = b^3$, av vilka den senare ger $b=0$ eller $b=c$. Fallet $b=0$ ger $a=0$, men $F(0,0,c) = 0 \neq 48$. Återstår fallet $b=c$. Insättning i $F=48$ ger $48 = F(2b,b,b) = 48b^4$, d.v.s. $b = \pm 1$ (ty $b \in \mathbf{R}$), och därmed tangeringspunkterna $(2,1,1)$ och $(-2,-1,-1)$, med tillhörande $C=6$ respektive $C=-6$.

Svar: $C = \pm 6$.

6. Integralen är generaliserad men integranden är positiv, så vi får använda upprepad integration och variabelbyten direkt.

Rymdpolärt byte $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ med $dxdydz = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$ och ny mängd $E:\ r>0,\ 0<\theta<\pi,\ \pi/4<\varphi<\pi/2$, ger, eventuellt med ett variabelbyte $t=r^3$ i r-integralen nedan,

$$\begin{aligned}
\iiint_D \frac{x/y}{1+(x^2+y^2+z^2)^3}\,dxdydz &= \iiint_E \frac{\cos\varphi/\sin\varphi}{1+r^6}\,r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi \\
&= \int_0^\infty \frac{r^2\,dr}{1+r^6}\cdot\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\cdot\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi \\
&= \left[\frac{\arctan(r^3)}{3}\right]_0^\infty\cdot\big[-\cos\theta\big]_0^\pi\cdot\big[\ln|\sin\varphi|\big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{6}\cdot 2\cdot\ln\sqrt{2} = \frac{\pi\ln 2}{6}.
\end{aligned}$$

7. (a) Med planpolära koordinater $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ får vi

$$f(x,y) = \frac{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\cos\varphi\sin\varphi + \rho^3\sin^3\varphi}{\rho} = \rho\big(\cos^2\varphi + \cos\varphi\sin\varphi + \rho\sin^3\varphi\big),$$

så $|f(x,y)-0| \leq \rho(1+1+\rho) \to 0$ när $\rho\to 0$ och φ varierar fritt, d.v.s. $f(x,y)\to 0$ när $(x,y)\to(0,0)$. Sätt därför $f(0,0)=0$ för att få kontinuitet i origo.

Svar: $f(0,0)=0$.

(b)

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{h^2/|h|-0}{h} = \frac{h}{|h|} = \begin{cases} 1, & h>0, \\ -1, & h<0, \end{cases}$$

så gränsvärdet när $h\to 0$, d.v.s. $f'_x(0,0)$, existerar ej. Vidare,

$$\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \frac{k^3/|k|-0}{k} = |k| \to 0 \quad \text{när } k\to 0,$$

så $f'_y(0,0)=0$.

Svar: $f'_x(0,0)$ existerar ej. $f'_y(0,0)$ existerar $(=0)$.

(c) Låt $\boldsymbol{v}=(a,b)$ med $a^2+b^2=1$. Då blir

$$\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t} = \left(\frac{(ta)^2+ta\cdot tb+(tb)^3}{|t|}-0\right)\Big/ t = (a^2+ab)\frac{t}{|t|}+b^3|t|$$

som har gränsvärde när $t\to 0$ precis då $a^2+ab=0$, d.v.s. precis då $a=0$ eller $a+b=0$; gränsvärdet är då definitionsmässigt riktningsderivatan $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0)$. Motsvarande vektorer $\boldsymbol{v}$ med längd 1 är $\pm(0,1)$ respektive $\pm(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$.

Svar: $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0)$ existerar när $\boldsymbol{v}=(0,1)$, $(0,-1)$, $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ eller $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$.