Linköpings universitet
Matematiska institutionen

**Kurskod: TATA43**
**Provkod: TEN1**

**Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys**

**2016-06-02 kl 14–19**

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla funktioner $f(x, y, z)$ sådana att

$$\begin{cases} f'_x &= z^2e^z + y^2ze^x \sin y \\ f'_y &= y^2ze^x \cos y + e^z \sin y + 2yze^x \sin y \\ f'_z &= (z+2)xze^z + y^2e^x \sin y + \cos z - e^z \cos y \end{cases}$$

och $f(1, 0, 0) = 0$.

2. Beräkna

$$\iint_D x^2\,dxdy$$

där $D$ ges av olikheterna $3x^2 + y^2 \leq 2$, $y \leq x$ och $x \geq 0$.

3. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y) = x^2y + 3x^2 + 2xy + y^2.$$

4. Beräkna tyngdpunktens $z$-koordinat $z_T$ för den homogena (konstant massdensitet) kropp $D$ som ges av $x + y^2 + z \leq 1$, $x \geq 0$ och $z \geq 0$.
Kom ihåg: $z_T = \dfrac{1}{V}\iiint_D z\,dxdydz$, där $V$ är volymen av $D$.

5. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av

$$xz - y^2$$

då $x^2 + y^2 + z^2 = 12$, $x^2 + y^2 \leq 2z^2$ och $z \geq 0$.

6. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-lösningar $z(x, y)$ till differentialekvationen

$$4y^2z''_{xx} - 4yz''_{xy} + z''_{yy} - 2z'_x = 6y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

under bivillkoren $z(x, 0) = x^2$ och $z'_y(x, 0) = \sin x$, genom att t.ex. göra variabelbytet $u = x + y^2$, $v = y$.

7. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} xyz + e^{2x+y+z-2} = 1 \\ xy + xz + yz = 1 \end{cases}$$

implicit definierar $\mathcal{C}^1$-funktioner $x(y)$ och $z(y)$ i en omgivning till punkten $(0, 1, 1)$. Bestäm $x'(1)$ och $z'(1)$. Har någon av $x(y)$ eller $z(y)$ lokalt maximum eller minimum i $y = 1$ ?

**Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2016-06-02**

1. Integrering av ekvation 1 ger $f(x,y,z) = xz^2e^z + y^2z\,e^x \sin y + g(y,z)$, som insatt i ekvation 2 ger $g'_y(y,z) = e^z \sin y$, som integrerat blir $g(y,z) = -e^z \cos y + h(z)$. Insättning i ekvation 3 ger sedan $h'(z) = \cos z$, d.v.s. $h(z) = \sin z + C$. Vi får $f(x,y,z) = xz^2e^z + y^2z\,e^x \sin y - e^z \cos y + \sin z + C$, och kravet $f(1,0,0) = 0$ ger $C = 1$.

   Svar: $f(x,y,z) = xz^2e^z + y^2z\,e^x \sin y - e^z \cos y + \sin z + 1$.

2. Vi gör först ett linjärt byte $u = x\sqrt{3}$, $v = y$ som överför $D$ till en ny mängd $E : u^2 + v^2 \le 2$, $v \le u/\sqrt{3}$, $u \ge 0$ (en cirkelsektor, rita figur!) och ger $dxdy = dudv/\sqrt{3}$, och sedan gör vi det vanliga planpolära bytet $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$ med ny mängd $F : 0 \le \rho \le \sqrt{2}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/6$ och $dudv = \rho\, d\rho d\varphi$, och får

$$\iint_D x^2\, dxdy = \iint_E \left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{dudv}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \iint_F (\rho\cos\varphi)^2 \rho\, d\rho d\varphi = \frac{1}{3\sqrt{3}} \iint_F \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \rho^3\, d\rho d\varphi$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/6} \cdot \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) \cdot 1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{24}.$$

3. De stationära punkterna fås ur $f'_x = 2xy + 6x + 2y = 0$ och $f'_y = x^2 + 2x + 2y = 0$. Ur den andra ekvationen får vi $2y = -x^2 - 2x$, som insatt i den första ger $x(4 - 3x - x^2) = 0$, d.v.s. $x = 0$, $x = 1$ eller $x = -4$, och därmed tre stationära punkter: $(0,0)$, $(1,-3/2)$ och $(-4,-4)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 2y + 6$, $f''_{xy} = 2x + 2$ och $f''_{yy} = 2$.

   I $(0,0)$ blir $f''_{xx} = 6$, $f''_{xy} = 2$ och $f''_{yy} = 2$, och den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$
$$= 6h^2 + 4hk + 2k^2 = 2(k+h)^2 + 4h^2,$$

   som är positivt definit eftersom $Q(h,k) \ge 0$ för alla $(h,k)$ och $Q(h,k) = 0$ endast om $k + h = 0$ och $h = 0$, d.v.s. endast om $(h,k) = (0,0)$. Således är punkten $(0,0)$ en lokal minimipunkt för $f$.

   I $(1,-3/2)$ blir $f''_{xx} = 3$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = 2$, och vi får den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = 3h^2 + 8hk + 2k^2 = 2(k+2h)^2 - 5h^2,$$

   som är indefinit eftersom t.ex. $Q(0,1) = 2 > 0$ medan $Q(-1,2) = -5 < 0$, så punkten $(1,-3/2)$ är ingen lokal extrempunkt för $f$.

   I $(-4,-4)$, slutligen, blir $f''_{xx} = -2$, $f''_{xy} = -6$ och $f''_{yy} = 2$, och

$$Q(h,k) = -2h^2 - 12hk + 2k^2,$$

   som vi direkt ser är indefinit eftersom koefficienterna för $h^2$ och $k^2$ har olika tecken (explicit får vi $Q(1,0) = -2 < 0$ och $Q(0,1) = 2 > 0$), så punkten $(-4,-4)$ är ingen lokal extrempunkt för $f$.

   Svar: $(0,0)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

4. Med stavar i $z$-led kan kroppen $D$ skrivas

$$D = \{(x,y,z) : (x,y) \in \tilde{D},\ 0 \le z \le 1 - x - y^2\},$$

där projektionen $\tilde{D}$ av $D$ på $xy$-planet ges av $x + y^2 \le 1$, $x \ge 0$; alltså kan $\tilde{D}$ skrivas (rita figur!)

$$\tilde{D} = \{(x,y) : -1 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1 - y^2\},$$

och vi får

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dxdydz = \iint_{\tilde{D}} (1 - x - y^2)\, dxdy = \int_{-1}^{1} \left( \int_0^{1-y^2} (1 - x - y^2)\, dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^{1} \left[ \frac{(1-x-y^2)^2}{-2} \right]_{x=0}^{x=1-y^2} dy = \int_{-1}^{1} \frac{(1-y^2)^2}{2}\, dy = \frac{1}{2} \left[ y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^{1} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

och, med samma integrationsordning som ovan,

$$\begin{aligned} \iiint_D z\, dxdydz &= \iint_{\tilde{D}} \left[ \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y^2} dxdy = \iint_{\tilde{D}} \frac{(1-x-y^2)^2}{2}\, dxdy = \int_{-1}^{1} \frac{(1-y^2)^3}{6}\, dy \\ &= \frac{1}{6} \left[ y - y^3 + \frac{3y^5}{5} - \frac{y^7}{7} \right]_{-1}^{1} = \frac{16}{105}, \end{aligned}$$

så $z_T = (16/105)/(8/15) = 2/7$.

<u>Svar</u>: $z_T = 2/7$.

5. Bivillkoren $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 12$, $h(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2 \le 0$ och $z \ge 0$ bestämmer en sluten del av en sfär – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y,z) = xz - y^2$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för $f$ på denna mängd.

   Någon punkt med $z = 0$ finns inte i mängden, ty i en sådan punkt vore i så fall $x^2 + y^2 \le 0$ och $x^2 + y^2 = 12$ samtidigt, vilket är orimligt. I fortsättningen kan vi därför anta att $z > 0$.

   Vi får $\nabla f = (z, -2y, x)$, $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ och $\nabla h = (2x, 2y, -4z)$. Kandidatjakt:

   - Kandidater på ytan $g = 12$, $h < 0$, $z > 0$ finns där

   $$\nabla f \parallel \nabla g \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{0} = \nabla f \times \nabla g = 2(-xy - 2yz, x^2 - z^2, 2xy + yz) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pm z, \\ (x + 2z)y = 0, \\ (2x + z)y = 0. \end{cases}$$

     Fallet $x = z$ ger i övriga två ekvationer $3yz = 0$, d.v.s. $y = 0$ (ty $z > 0$), som insatt i $g = 12$ ger $2z^2 = 12$, d.v.s. $z = \sqrt{6}$ (återigen p.g.a. att $z > 0$) och kandidaten $f(\sqrt{6}, 0, \sqrt{6}) = 6$; fallet $x = -z$ ger analogt kandidaten $f(-\sqrt{6}, 0, \sqrt{6}) = -6$; observera att $h < 0$ för båda.

   - Kandidater på kurvan $g = 12$, $h = 0$, $z > 0$ finns där $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ är linjärt beroende, d.v.s. där

   $$0 = \begin{vmatrix} z & -2y & x \\ 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -4z \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} z & -2y & x \\ 0 & 0 & 3z \\ x & y & -2z \end{vmatrix} = -12yz(2x + z) \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \text{ eller } z = -2x,$$

     ty $z > 0$. Fallet $y = 0$ ger vid insättning i $g = 12$ och $h = 0$ att $x^2 + z^2 = 12$ och $x^2 = 2z^2$, som ger $z = 2$ (ty $z > 0$) och kandidaterna $f(2\sqrt{2}, 0, 2) = 4\sqrt{2}$ och $f(-2\sqrt{2}, 0, 2) = -4\sqrt{2}$, medan fallet $z = -2x$ ger $5x^2 + y^2 = 12$ och $y^2 - 7x^2 = 0$ och kandidaterna $f(-1, \pm\sqrt{7}, 2) = -9$.

<u>Svar</u>: $f_{\max} = f(\sqrt{6}, 0, \sqrt{6}) = 6$, $f_{\min} = f(-1, \pm\sqrt{7}, 2) = -9$.

6. Variabelbytet $u = x + y^2$ och $v = y$ ger $z'_x = z'_u$ och $z'_y = 2yz'_u + z'_v$. Vidare,

$$\begin{aligned}
z''_{xx} &= (z'_x)'_x = (z'_u)'_x = z''_{uu},\\
z''_{xy} &= (z'_x)'_y = (z'_u)'_y = 2yz''_{uu} + z''_{uv},\\
z''_{yy} &= (z'_y)'_y = (2yz'_u + z'_v)'_y = 2z'_u + 2y(z'_u)'_y + (z'_v)'_y = 4y^2 z''_{uu} + 4yz''_{uv} + z''_{vv} + 2z'_u.
\end{aligned}$$

Insättning i differentialekvationen ger efter förenkling $z''_{vv} = 6v$, och integreringar m.a.p. $v$ ger först $z'_v = 3v^2 + f(u)$ och sedan $z = v^3 + vf(u) + g(u)$, där $f$ och $g$ är $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel.

Differentialekvationens allmänna lösning är således $z(x, y) = y^3 + yf(x + y^2) + g(x + y^2)$.

Första bivillkoret ger nu $x^2 = z(x, 0) = g(x)$, d.v.s. $g(t) = t^2$, varför $z(x, y) = y^3 + yf(x + y^2) + (x + y^2)^2$, och eftersom $z'_y(x, y) = 3y^2 + f(x + y^2) + yf'(x + y^2) \cdot 2y + 2(x + y^2) \cdot 2y$ ger det andra bivillkoret $\sin x = z'_y(x, 0) = f(x)$, d.v.s. $f(t) = \sin t$.

<u>Svar</u>: $z(x, y) = y^3 + y \sin(x + y^2) + (x + y^2)^2$.

7. Låt för korthets skull $h(x, y, z) = e^{2x+y+z-2}$; då är $h(0, 1, 1) = 1$, $h'_x = 2h$ och $h'_y = h = h'_z$. Sätt $F(x, y, z) = xyz + h$ och $G(x, y, z) = xy + xz + yz$. Vi ser att $F, G \in \mathcal{C}^1$ samt att $F(0, 1, 1) = 1$ och $G(0, 1, 1) = 1$. Vidare,

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} = \begin{pmatrix} yz + 2h & xy + h \\ y + z & x + y \end{pmatrix}, \quad \text{som i } (0, 1, 1) \text{ är } \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{med determinant } = 1 \neq 0.$$

Enligt implicita funktionssatsen definierar därför ekvationssystemet $F(x, y, z) = 1$, $G(x, y, z) = 1$ i någon omgivning till $(0, 1, 1)$ $\mathcal{C}^1$-funktioner $x(y)$, $z(y)$; notera att, trivialt, $x(1) = 0$ och $z(1) = 1$. Implicit derivering av $F(x(y), y, z(y)) = 1$ och $G(x(y), y, z(y)) = 1$ i en omgivning till $y = 1$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} (yz + 2h)x'(y) + (xz + h) + (xy + h)z'(y) = 0, \\ (y + z)x'(y) + (x + z) + (x + y)z'(y) = 0, \end{cases} \quad \text{i } (0, 1, 1)\text{:} \quad \begin{cases} 3x'(1) + 1 + z'(1) = 0, \\ 2x'(1) + 1 + z'(1) = 0; \end{cases}$$

således är $x'(1) = 0$ och $z'(1) = -1$.

Eftersom $z'(1) \neq 0$ har funktionen $z(y)$ inget lokalt extremvärde i $y = 1$. Däremot är $x'(1) = 0$, så funktionen $x(y)$ har *eventuellt* lokalt extremvärde i $y = 1$. Vi kan lösa ut $x'(y)$ och $z'(y)$ ur systemet ovan och ser då att de är $\mathcal{C}^1$-funktioner, d.v.s. att $x(y)$ och $z(y)$ är $\mathcal{C}^2$-funktioner. Vi får därför derivera systemet implicit m.a.p. $y$, och direkt insättning av $y = 1$ i dessa derivator ger nu (om vi skriver $\tilde{h}(y) = h(x(y), y, z(y))$; notera att $\tilde{h}(1) = 1$ och $\tilde{h}'(1) = \tilde{h}(1) \cdot (2x'(1) + 1 + z'(1)) = 0$) ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x''(1) + z''(1) = 0, \\ 2x''(1) - 2 + z''(1) = 0, \end{cases}$$

varför $x''(1) = -2 < 0$ (och $z''(1) = 6$); således har $x(y)$ lokalt maximum i $y = 1$.

<u>Svar</u>: $x'(1) = 0$, $z'(1) = -1$; $x(y)$ har lokalt maximum och $z(y)$ saknar lokalt extremvärde i $y = 1$.