Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2016-01-07 kl 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-funktioner $f(x,y)$ som uppfyller differentialekvationen
$$x\, f'_x + 2y\, f'_y = x^2 \qquad (x > 0,\ y > 0)$$
med bivillkoret $f(x,1) = x^2$. (Använd t.ex. variabelbytet $u = x$, $v = x^2/y$.)

2. Beräkna $\displaystyle\iiint_D xz\, dxdydz$, där
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 3,\ x+y \leq 0\}.$$

3. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till funktionen
$$f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2z.$$

4. Bestäm alla tangentplan till ytan $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ som innehåller punkterna $(3,2,2)$ och $(5,3,3)$.

5. Låt D vara det obegränsade område i $\mathbf{R}^2$ som beskrivs av olikheterna $x \geq 2$, $y \geq 0$ och $xy \leq 2$. Beräkna värdet hos den generaliserade integralen
$$\iint_D (xy - 1)\, dxdy$$
om den är konvergent, annars visa att den är divergent.

6. Bestäm största värdet, om det finns, av
$$f(x,y,z,t) = \frac{x^8 y^4 z^2 t}{1 + (x+y+z+t)^{30}}$$
då $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ och $t \geq 0$.

7. Låt $f(x,y)$ vara en $\mathcal{C}^1$-funktion av två variabler.
   (a) Ange det gränsvärde som definierar riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(a,b)$, där $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ är en enhetsvektor och (a,b) är en inre punkt i f:s definitionsmängd.
   (b) Härled formeln som uttrycker $f'_{\mathbf{v}}(a,b)$ i termer av $\nabla f(a,b)$.
   (c) Om $f'_{(1/\sqrt{2},\,1/\sqrt{2})}(a,b) = \sqrt{18}$ och $f'_{(-2/\sqrt{5},\,1/\sqrt{5})}(a,b) = -\sqrt{45}$, för vilken enhetsvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ är $f'_{\mathbf{v}}(a,b)$ som störst, och vad är detta största värde?

Lösningsskisser till TATA43 Flervariabelanalys 2016-01-07

1. Med det föreslagna variabelbytet fås

$$x\,f'_x + 2y\,f'_y = x\,(f'_u + \tfrac{2x}{y}\,f'_v) + 2y\,(-\tfrac{x^2}{y^2}\,f'_v) = x\,f'_u,$$

   så PDE:n övergår i $x\,f'_u = x^2$, dvs. $f'_u = u$. Den allmänna lösningen är alltså $f = u^2/2 + g(v) = x^2/2 + g(x^2/y)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Bivillkoret $f(x,1) = x^2$ ger $x^2/2 + g(x^2) = x^2$, alltså $t/2 + g(t) = t$, alltså $g(t) = t/2$.

   Svar: $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{2y}$.

2. Byte till rymdpolära koordinater ger ett nytt område E, som beskrivs av $0 \le r \le \sqrt{3}$, $0 \le \theta \le \pi/2$ och (t.ex.) $-5\pi/4 \le \varphi \le -\pi/4$. Integralen blir därmed

$$\begin{aligned}\iiint_D xz\,dxdydz &= \iiint_E r\cos\varphi\sin\theta \cdot r\cos\theta \cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi \\ &= \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{\sqrt{3}} \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\theta=0}^{\pi/2} \Big[\sin\varphi\Big]_{\varphi=-5\pi/4}^{-\pi/4} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3\sqrt{6}}{5}.\end{aligned}$$

   Svar: $-3\sqrt{6}/5$.

3. Stationära punkter fås ur villkoret $\nabla f(x,y,z) = \mathbf{0}$; detta ger ett linjärt ekvationssystem med den enda lösningen $(x,y,z) = (-1,-1,2)$. På vanligt sätt finner vi $f(-1+h, -1+k, 2+l) = -2 + Q(h,k,l)$, där

$$Q(h,k,l) = 3h^2 + k^2 + l^2 - 2hk + 2hl = (k-h)^2 + (l+h)^2 + h^2.$$

   (Resttermen i Taylorutvecklingen är faktiskt noll i detta fall; funktionen f själv innehåller ju inga termer av grad högre än två.) Det är uppenbart att $Q \ge 0$ alltid, och $Q = 0$ bara om $k-h = l+h = h = 0$, dvs. om $h = k = l = 0$. Därmed är Q positivt definit, och $f(-1,-1,2) = -2$ är ett strängt lokalt minimium.

   Svar: $(-1,-1,2)$ är en lokal minimipunkt.

4. Sätt $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Tangentplanet till nivåytan $f = 1$ i punkten (a,b,c) har $\nabla f(a,b,c) = (2a, 2b, -2c)$ som normalvektor, och det har alltså ekvationen $a(x-a) + b(y-b) + (-c)(z-c) = 0$, vilket kan skrivas som

$$ax + by - cz = 1, \tag{*}$$

eftersom punkten måste uppfylla $a^2 + b^2 - c^2 = 1$ för att ligga på ytan. Detta plan innehåller punkterna $(3,2,2)$ och $(5,3,3)$ om och endast om

$$3a + 2b - 2c = 1 \quad \text{och} \quad 5a + 3b - 3c = 1,$$

dvs. $(a,b,c) = (-1, 2+t, t)$ där $t \in \mathbf{R}$. Det enda värde på t för vilket detta uppfyller ytans ekvation $a^2 + b^2 - c^2 = 1$ är $t = -1$. Alltså är $(a,b,c) = (-1,1,-1)$ vilket sätts in i $(*)$ ovan för att få svaret.

Svar: Det enda sådana planet är $-x + y + z = 1$.

5. Integranden $f(x,y) = xy - 1$ växlar tecken i området (längs kurvan $xy = 1$), så vi måste undersöka den positiva delen och den negativa delen var för sig. Den positiva delen fås genom att integrera över området D^+ som ges av $x \geq 2$, $y \geq 0$ och $1 \leq xy \leq 2$:

$$\begin{aligned}\iint_{D^+} (xy-1)\,dxdy &= \int_{x=2}^{\infty} \left(\int_{y=1/x}^{2/x} x\Big(y - \tfrac{1}{x}\Big)\,dy \right) dx \\ &= \int_{x=2}^{\infty} \left[\tfrac{1}{2} x \Big(y - \tfrac{1}{x}\Big)^2 \right]_{y=1/x}^{2/x} dx = \int_{x=2}^{\infty} \frac{dx}{2x},\end{aligned}$$

vilket är en divergent integral. Därmed räknas hela dubbelintegralen över D som divergent (oavsett om den negativa delen är konvergent eller divergent, så den saken behöver inte undersökas).

Svar: Divergent.

6. Vi söker största värdet av

$$f(x,y,z,t) = \frac{x^8 y^4 z^2 t}{1 + (x+y+z+t)^{30}}$$

på D, som ges av $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $t \geq 0$. Funktionen f är kontinuerlig, men D (en sextondel av $\mathbf{R}^4$) är *inte* kompakt, så vi vet inte på förhand att $f_{\max}$ existerar.

D är unionen av mängderna $D_a = \{(x,y,z,t) \in D : x + y + z + t = a\}$ för $a \geq 0$, och varje D_a är sluten och begränsad; således existerar $\varphi(a) := \max_{D_a} f$ för varje $a \geq 0$. Eftersom

$$f(x,y,z,t) = \frac{x^8 y^4 z^2 t}{1 + a^{30}} \qquad \text{på } D_a$$

räcker det att maximera $\tilde{f}(x,y,z,t) := x^8y^4z^2t$ på D_a för att bestämma $\varphi(a)$. Trivialt är $\tilde{f} \geq 0$ på D_a, och $\tilde{f} = 0$ precis när någon av variablerna x, y, z, t är 0, så $\varphi(0) = 0$ och maximum för fixt $a > 0$ antas i en punkt där $g(x) := x + y + z + t = a$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $t > 0$, alltså där

$$\begin{cases} \nabla\tilde{f} \parallel \nabla g \\ g = a \end{cases} \quad \overset{*}{\iff} \quad \begin{cases} x/8 = y/4 = z/2 = t/1 \\ x + y + z + t = a \end{cases}$$
$$\iff \quad x = \frac{8a}{15}, \quad y = \frac{4a}{15}, \quad z = \frac{2a}{15}, \quad t = \frac{a}{15},$$

en enda kandidat; i steg $*$ har vi också använt att $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $t > 0$. Vi får att

$$\varphi(a) = f\Big(\frac{8a}{15}, \frac{4a}{15}, \frac{2a}{15}, \frac{a}{15}\Big) = \frac{8^8 4^4 2^2 1^1}{15^{15}} \cdot \frac{a^{15}}{1 + a^{30}}, \qquad a \geq 0.$$

Med $b := a^{15}$ räcker det därför att optimera $\psi(b) := b/(1 + b^2)$ för $b \geq 0$, och eftersom $\psi'(b) = (1 - b^2)/(1 + b^2)^2$ ser vi att ψ är strängt växande på $[0, 1]$ och strängt avtagande på $[1, \infty[$, så $\psi_{\max} = \psi(1) = 1/2$. Således är φ maximal när $a = 1$, och därmed är

$$f_{\max} = \varphi_{\max} = \varphi(1) = f\Big(\frac{8}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}\Big) = \frac{2^{34}}{15^{15}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2^{33}}{15^{15}}.$$

Svar: $2^{33}/15^{15}$.

7. (a) Definitionen är $f'_{\mathbf{v}}(a,b) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a,b)}{t}$.

   (b) Formeln är $f'_{\mathbf{v}}(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{v}$. Enligt definitionen av vanlig envariabelderivata kan gränsvärdet i (a) skrivas som $f'_{\mathbf{v}}(a,b) = g'(0)$, där $g(t) = f(a + tv_1, b + tv_2)$. Kedjeregeln ger $g'(t) = f'_x(a + tv_1, b + tv_2)\, v_1 + f'_y(a + tv_1, b + tv_2)\, v_2$. Insättning av $t = 0$ i detta ger $f'_{\mathbf{v}}(a,b) = g'(0) = f'_x(a,b)\, v_1 + f'_y(a,b)\, v_2 = \nabla f(a,b) \cdot \mathbf{v}$, vilket skulle visas.

   (c) Med $\nabla f(a,b) = \left(\begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix}\right)$ fås $\frac{A+B}{\sqrt{2}} = \sqrt{18}$ och $\frac{-2A+B}{\sqrt{5}} = -\sqrt{45}$, alltså $A = 7$ och $B = -1$.

   Svar: Riktningsderivatan är som störst i gradientens riktning: $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{50}}\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Gradientens belopp $\sqrt{50}$ är riktningsderivatans största värde.