Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2015-10-21 kl 08–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y) = x^3 + 4xy - x^2 - y^2.$$

2. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av

$$x - y + z$$

då $x^2 + 2y^2 + z^2 = 10$ och $x \geq 0$.

3. Beräkna

$$\iint_D y^2 \, dxdy$$

där D ges av olikheterna $x^2 + 8xy + 20y^2 \leq 3$ och $y \leq 0 \leq x + 2y$.

4. Bestäm alla tangentplan till ytan

$$z = x^2 + y^2$$

som innehåller linjen $x = t$, $y = 0$, $z = 2t - 5$, $t \in \mathbf{R}$.

5. Bestäm tyngdpunkten för den kropp D som uppstår när man från ett homogent halvklot med radie a tar bort ett halvklot med radie $b < a$, om motsvarande båda hela klot har samma centrum. Undersök speciellt fallen $b = 0$ respektive $b \to a$.

Tyngdpunkten (x_T, y_T, z_T) ges av $x_T = \iiint_D x \, dxdydz / \iiint_D dxdydz$ etc.

6. Visa att ekvationen

$$y^4 - (1 + x^2)y + x^4 = 0$$

definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y(x)$ i en omgivning till $(x, y) = (0, 1)$ och avgör om $y(x)$ har lokalt extremvärde i $x = 0$; ange i så fall karaktären av det lokala extremvärdet.

7. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-lösningar $z(x, y)$ till differentialekvationen

$$yz'_x - z'_y = 8xy, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

under bivillkoret $z(x, 0) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$, genom att t.ex. göra ett variabelbyte av typen $u = f(x) + g(y)$, $v =$ något lämpligt.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2015-10-21

1. De stationära punkterna fås ur $f'_x = 3x^2+4y-2x = 0$ och $f'_y = 4x-2y = 0$. Den andra ekvationen ger genast $y = 2x$, som insatt i den första ger $3x^2 + 6x = 0$, d.v.s. $x = 0$ eller $x = -2$, och vi får därmed två stationära punkter: $(0, 0)$ och $(-2, -4)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 6x - 2$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = -2$.

   I $(0, 0)$ blir $f''_{xx} = -2$, och den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q(h,k) &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= -2h^2 + 8hk - 2k^2 = -2(k-2h)^2 + 6h^2, \end{aligned}$$

   som är indefinit eftersom t.ex. $Q(1, 2) = 6 > 0$ medan $Q(0, 1) = -2 < 0$, så punkten $(0, 0)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

   I $(-2, -4)$ blir $f''_{xx} = -14$, och vi får den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = -14h^2 + 8hk - 2k^2 = -2(k-2h)^2 - 6h^2,$$

   som är negativt definit eftersom $Q(h, k) \leq 0$ för alla (h, k) och $Q(h, k) = 0$ endast om $k - 2h = 0$ och $h = 0$, d.v.s. endast om $(h, k) = (0, 0)$. Således är punkten $(-2, -4)$ en lokal maximipunkt för f.

   Svar: $(-2, -4)$ är en lokal maximipunkt. Lokala minimipunkter saknas.

2. De två bivillkoren $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 = 10$ och $h(x, y, z) = x \geq 0$ bestämmer en sluten halv ellipsoidyta – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x, y, z) = x - y + z$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (1, -1, 1)$, $\nabla g = (2x, 4y, 2z)$ och $\nabla h = (1, 0, 0)$. Kandidatjakt:

   - Kandidater på ytan $g = 10$, $h > 0$ finns där

$$\nabla f \parallel \nabla g \quad \Leftrightarrow \quad x = -2y = z.$$

     Insättning i $g = 10$ ger $10y^2 = 10$, d.v.s. $y = \pm 1$, och kandidaten $f(2, -1, 2) = 5$ (observera att punkten $(-2, 1, -2)$ inte uppfyller kravet $h > 0$).

   - Kandidater på kurvan $g = 10$, $h = 0$ finns där $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ är linjärt beroende, d.v.s. där

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2x & 4y & 2z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4y - 2z,$$

     d.v.s. där $z = -2y$. Insättning i $h = 0$ och $g = 10$ ger $x = 0$ och $y = \pm\sqrt{15}/3$ och därmed kandidaterna $f(0, \sqrt{15}/3, -2\sqrt{15}/3) = -\sqrt{15}$ och $f(0, -\sqrt{15}/3, 2\sqrt{15}/3) = \sqrt{15}$.

   Svar: $f_{\max} = f(2, -1, 2) = 5$, $f_{\min} = f(0, \sqrt{15}/3, -2\sqrt{15}/3) = -\sqrt{15}$.

3. D kan skrivas $(x + 4y)^2 + (2y)^2 \leq 3$, $y \leq 0$, $0 \leq x + 2y$. Vi gör först ett linjärt byte $u = x + 4y$, $v = 2y$ som överför D till en ny mängd $E : u^2 + v^2 \leq 3$, $v \leq 0$, $u \geq v$ (en cirkelsektor, rita figur!) och ger $dxdy = dudv/2$, och sedan det vanliga planpolära bytet $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$ med ny mängd $F : 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}$, $-3\pi/4 \leq \varphi \leq 0$ och $dudv = \rho\, d\rho d\varphi$, och får

$$\begin{aligned} \iint_D y^2\, dxdy &= \iint_E \left(\frac{v}{2}\right)^2 \frac{dudv}{2} = \frac{1}{8} \iint_F (\rho\sin\varphi)^2 \rho\, d\rho d\varphi = \frac{1}{8} \iint_F \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \rho^3\, d\rho d\varphi \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{-3\pi/4}^{0} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{8}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)\frac{9}{4} = \frac{9}{256}(3\pi + 2). \end{aligned}$$

4. Sätt $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$; då är den givna ytan nivåytan $F(x,y,z) = 0$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a,b,c) på ytan innehåller linjen $(x,y,z) = (t,0,2t-5) = (0,0,-5)+t(1,0,2)$ precis då $\nabla F(a,b,c) \perp (1,0,2)$, $\nabla F(a,b,c) \perp (a-0, b-0, c+5)$ och $F(a,b,c) = 0$, d.v.s. precis då

$$2a - 2 = 0, \quad 2a^2 + 2b^2 - c - 5 = 0 \quad \text{och} \quad a^2 + b^2 - c = 0.$$

Det första villkoret ger $a = 1$, och det tredje insatt i det andra ger $c = 5$; dessa båda samband insatta i det tredje villkoret ger $b^2 = 4$, alltså $b = \pm 2$, och därmed de båda tangeringspunkterna $(1, \pm 2, 5)$. Eftersom $\nabla F(1, \pm 2, 5) = (2, \pm 4, -1)$ får vi därför de båda tangentplanen $2x+4y-z = 5$ och $2x - 4y - z = 5$.

Svar: Tangentplanen är $2x + 4y - z = 5$ och $2x - 4y - z = 5$.

5. Vi inför ett ortonormerat koordinatsystem med origo i motsvarande båda hela klots gemensamma centrum och positiva z-axeln längs kroppens symmetriaxel, genom kroppen.

Rymdpolärt byte $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ ger $dxdydz = r^2 \sin\theta \, drd\theta d\varphi$ och ny mängd $E : b \le r \le a$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Av symmetriskäl är $x_T = 0 = y_T$. Vidare, $\iiint_D z \, dxdydz = \iiint_E r^3 \cos\theta \sin\theta \, drd\theta d\varphi = \int_b^a r^3 \, dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi(a^4 - b^4)/4$ och $\iiint_D dxdydz = \text{volym}(D) = 2\pi(a^3 - b^3)/3$. I detta koordinatsystem är alltså

$$x_T = 0, \quad y_T = 0, \quad z_T = \frac{\pi(a^4 - b^4)/4}{2\pi(a^3 - b^3)/3} = \frac{3}{8} \cdot \frac{a^4 - b^4}{a^3 - b^3} = \frac{3a}{8} \cdot \frac{1 - (b/a)^4}{1 - (b/a)^3}.$$

I specialfallet $b = 0$ blir $z_T = 3a/8$, medan fallet $b \to a$ ger, med $t = b/a$ och observationen att $(1 - t^4)/(1 - t^3) = (1 + t + t^2 + t^3)/(1 + t + t^2) \to 4/3$ då $t \to 1$, att $z_T \to a/2$ då $b \to a$.

6. Med $F(x,y) = y^4 - (1 + x^2)y + x^4$ kan vår ekvation skrivas $F(x,y) = 0$. Vi ser att $F \in \mathcal{C}^1$ och $F(0,1) = 0$, och eftersom $F'_y = 4y^3 - 1 - x^2$ är $F'_y(0,1) = 3 \neq 0$. Implicita funktionssatsen medför därför att ekvationen $F(x,y) = 0$ i en omgivning till $(0,1)$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y(x)$.

Implicit derivering av $F(x, y(x)) = 0$ ger $4x^3 - 2xy(x) + (4y(x)^3 - 1 - x^2)y'(x) = 0$, d.v.s.

$$y'(x) = \frac{2xy(x) - 4x^3}{4y(x)^3 - 1 - x^2} = 2x \cdot g(x), \qquad \text{där} \quad g(x) = \frac{y(x) - 2x^2}{4y(x)^3 - 1 - x^2}.$$

Vi noterar först att $y'(0) = 0$, så $x = 0$ *kan* vara en lokal extrempunkt för $y(x)$. Eftersom $g(0) = 1/3$ och g är kontinuerlig i en omgivning till $x = 0$ är $g(x) > 0$ i någon omgivning till $x = 0$, och i denna omgivning uppvisar $y'(x)$ teckenväxlingen $-\,0\,+$. Således har $y(x)$ ett lokalt minimum i $x = 0$.

Svar: Lokalt minimum.

7. Eftersom $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y$ får vi $yz'_x - z'_y = (yu'_x - u'_y)z'_u + (yv'_x - v'_y)z'_v$. Med det föreslagna bytet $u = f(x) + g(y)$ blir alltså

$$yz'_x - z'_y = \big(yf'(x) - g'(y)\big)z'_u + (yv'_x - v'_y)z'_v.$$

Här kan vi välja f och g så att koefficienten för z'_u blir noll, lämpligen genom att se till att $f'(x) = 1$ och $g'(y) = y$. Alltså är $u = x + y^2/2$ ett bra val, och vi kan nu välja v så enkel som möjligt samtidigt som bytet $(x,y) \leftrightarrow (u,v)$ blir $\mathcal{C}^1$ åt båda håll; $v = y$ duger, ty då blir $x = u - v^2/2$ och $y = v$. Med detta variabelbyte får vi $yz'_x - z'_y = -z'_v$ och därmed differentialekvationen $z'_v = -8(u - v^2/2)v = -8uv + 4v^3$, som integrerad ger $z = -4uv^2 + v^4 + h(u) = -4xy^2 - y^4 + h(x + y^2/2)$, där h är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Bivillkoret ger slutligen $e^x = z(x,0) = h(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$, d.v.s. $h(t) = e^t$, $t \in \mathbf{R}$, varför $z(x,y) = \exp(x + y^2/2) - 4xy^2 - y^4$.

Svar: $z(x,y) = \exp(x + y^2/2) - 4xy^2 - y^4$.