Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2015-08-20 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm de tangentplan till ytan $xy+yz+xz = 1$ som är parallella med planet $x+2y+z = 3$.

2. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till
$$f(x, y, z) = y^2z - x^2 - 2y^2 - z^2.$$

3. Beräkna
$$\iiint_D (x - y)z \, dxdydz,$$
där D ges av $x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$, $z \leq 0$ och $2y \leq x$.

4. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av
$$x^2 + xy + y^2 - y$$
då $x^2 + y^2 \leq 1$ och $x + y \leq -1$.

5. Beräkna $\iiint_D y \, dxdydz$, där området D ges av $x^2 + y^2 \leq z \leq 2$ och $y \geq |x|$.

6. Visa att sambandet $\begin{cases} u = x^3 - xy \\ v = 2xy - y^2 \end{cases}$ kring punkten $(x, y) = (1, 2)$ definierar en lokal $\mathcal{C}^1$-invers $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases}$ Bestäm sedan x, y, x'_u, x'_v, y'_u och y'_v i punkten $(u, v) = (-1, 0)$.

7. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-lösningar $z(x, y)$ till differentialekvationen
$$xyz''_{xx} - y^2z''_{xy} + (y + y^2)z'_x = 0, \quad x > 0,\ y > 0,$$
under bivillkoret $z(x, x) = 0$, till exempel genom att göra variabelbytet $u = xy$, $v = y$.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2015-08-20

1. Sätt $F(x,y,z) = xy + yz + xz$; då är den givna ytan nivåytan $F(x,y,z) = 1$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a,b,c) på ytan är parallellt med planet $x + 2y + z = 3$ precis då $\nabla F(a,b,c) \parallel (1,2,1)$ och $F(a,b,c) = 1$, d.v.s. precis då

$$(b+c, a+c, a+b) \parallel (1,2,1) \quad \text{och} \quad ab + bc + ac = 1.$$

Det första villkoret ger $a = c$ och $b = 0$, som insatt i det andra ger $c^2 = 1$, och därmed tangeringspunkterna $(1,0,1)$ och $(-1,0,-1)$, med tangentplanen $x+2y+z = 2$ respektive $x+2y+z = -2$.

Svar: Planen är $x + 2y + z = \pm 2$.

2. Stationära punkter för f fås ur ekvationssystemet $f'_x = -2x = 0$, $f'_y = 2yz - 4y = 0$ och $f'_z = y^2 - 2z = 0$. Den första ekvationen ger trivialt $x = 0$, och den tredje ger $z = y^2/2$, som insatt i den andra ger $y^3 - 4y = 0$, d.v.s. $y = \pm 2$ eller $y = 0$. Vi får således tre stationära punkter: $(0,2,2)$, $(0,-2,2)$ och $(0,0,0)$.

Andraderivatorna blir $f''_{xx} = -2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yy} = 2z - 4$, $f''_{yz} = 2y$, $f''_{zz} = -2$.

I punkten $(0,2,2)$ är $f''_{yy} = 0$ och $f''_{yz} = 4$, så vi får den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} \\ &= -2h^2 - 2l^2 + 8kl = -2h^2 + 8k^2 - 2(l - 2k)^2, \end{aligned}$$

som är indefinit: exempelvis är $Q(1,0,0) = -2 < 0$ medan $Q(0,1,2) = 8 > 0$. Alltså är $(0,2,2)$ ingen lokal extrempunkt för f.

I punkten $(0,-2,2)$ blir fortfarande $f''_{yy} = 0$ medan $f''_{yz} = -4$, och vi får helt analogt $Q(h,k,l) = -2h^2 - 2l^2 - 8kl = -2h^2 + 8k^2 - 2(l + 2k)^2$, som också är infinit eftersom exempelvis $Q(1,0,0) = -2 < 0$ medan $Q(0,-1,2) = 8 > 0$; inte heller $(0,-2,2)$ är någon lokal extrempunkt för f.

I punkten $(0,0,0)$, slutligen, är $f''_{yy} = -4$ och $f''_{yz} = 0$, så $Q(h,k,l) = -2h^2 - 4k^2 - 2l^2$, som är negativt definit eftersom $Q(h,k,l) \le 0$ för alla (h,k,l), och $Q(h,k,l) = 0$ endast om $h = 0$, $k = 0$ och $l = 0$, d.v.s. endast om $(h,k,l) = (0,0,0)$. Alltså är punkten $(x,y,z) = (0,0,0)$ en lokal maximipunkt för f.

Svar: $(0,0,0)$ är en lokal maximipunkt. Lokala minimipunkter saknas.

3. Linjärt byte $u = x$, $v = 2y$, $w = z$ med $|d(u,v,w)/d(x,y,z)| = 2$, så att $dxdydz = dudvdw/2$, och nytt område $E:\ u^2 + v^2 + w^2 \le 4$, $w \le 0$, $v \le u$, följt av rymdpolärt byte $u = r\sin\theta\cos\varphi$, $v = r\sin\theta\sin\varphi$, $w = r\cos\theta$ med $dudvdw = r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi$ och gränser $F:\ 0 \le r \le 2$, $\pi/2 \le \theta \le \pi$, $-3\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$, ger

$$\begin{aligned} \iiint_D (x-y)z\, dxdydz &= \iiint_E \frac{(2u - v)w}{2} \frac{dudvdw}{2} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 r^4\, dr \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta \cdot \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} (2\cos\varphi - \sin\varphi)\, d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^2 \left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_{\pi/2}^{\pi} [2\sin\varphi + \cos\varphi]_{-3\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{32}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3\sqrt{2} = -\frac{8\sqrt{2}}{5}. \end{aligned}$$

4. De två bivillkoren $g(x,y) = x^2 + y^2 \le 1$ och $h(x,y) = x + y \le -1$ bestämmer en sluten del av en sluten cirkelskiva – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - y$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

Vi får $\nabla f = (2x + y, x + 2y - 1)$, $\nabla g = (2x, 2y)$ och $\nabla h = (1,1)$. Kandidatjakt:

- Kandidater i ytan $g < 1$, $h < -1$ finns där $\nabla f = \mathbf{0}$, d.v.s. där $(x, y) = (-1/3, 2/3)$, men denna punkt ligger utanför mängden. Ingen kandidat här.
- Kandidater på cirkelbågen $g = 1$, $h < -1$ finns där $\nabla f \parallel \nabla g$, d.v.s. där

$$0 = \begin{vmatrix} 2x + y & x + 2y - 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y^2 - 2x^2 + 2x,$$

och eftersom dessutom $y^2 = 1 - x^2$ får vi $2x^2 - x - 1 = 0$, alltså $x = 1$ eller $x = -1/2$. Fallet $x = 1$ ger $y = 0$ och därmed punkten $(1, 0)$, och fallet $x = -1/2$ ger på samma sätt punkterna $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$; kontroll mot $h < -1$ ger att endast en av dessa tre punkter är en kandidat: $f(-1/2, -\sqrt{3}/2) = 1 + 3\sqrt{3}/4$.
- Kandidater på sträckan $h = -1$, $g < 1$ finns där $\nabla f \parallel \nabla h$, d.v.s. där $2x + y = x + 2y - 1$, som insatt i $h = -1$ ger punkten $(-1, 0)$ som inte uppfyller kravet $g < 1$. Ingen kandidat här.
- Hörnpunkterna finns där $g = 1$, $h = -1$, och ur detta ekvationssystem får vi kandidaterna $f(-1, 0) = 1$ och $f(0, -1) = 2$.

Svar: $f_{\max} = f(-1/2, -\sqrt{3}/2) = 1 + 3\sqrt{3}/4$, $f_{\min} = f(-1, 0) = 1$.

5. Med stavar i z-led får vi stavarna $x^2 + y^2 \le z \le 2$, och projektionen $\tilde{D}$ på xy-planet ges av $x^2 + y^2 \le 2$ och $y \ge |x|$, som kan skrivas $-1 \le x \le 1$, $|x| \le y \le \sqrt{2 - x^2}$ (rita figur!). Således blir

$$\iiint_D y\,dxdydz = \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{x^2+y^2}^{2} y\,dz \right) dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} (2 - x^2 - y^2) y\,dy \right) dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{(2 - x^2 - y^2)^2}{-4} \right]_{y=|x|}^{y=\sqrt{2-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,dx = \frac{16}{15}.$$

6. Avbildningen är $\mathcal{C}^1$, och $(x, y) = (1, 2)$ avbildas på $(u, v) = (-1, 0)$. Funktionalmatrisen

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - y & -x \\ 2y & 2x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

i punkten $(x, y) = (1, 2)$, och eftersom denna matris är inverterbar (determinanten $= 2 \ne 0$) medför inversa funktionssatsen att avbildningen har en lokal $\mathcal{C}^1$-invers $x(u, v)$, $y(u, v)$ definierad i någon omgivning till $(u, v) = (-1, 0)$. Trivialt är $x = 1$ och $y = 2$ när $(u, v) = (-1, 0)$, medan derivatorna där fås med invers matris:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svar: I punkten $(u, v) = (-1, 0)$ är $x = 1$, $y = 2$, $x'_u = -1$, $x'_v = 1/2$, $y'_u = -2$ och $y'_v = 1/2$.

7. $u = xy$ och $v = y$ ger $z'_x = yz'_u$ och $z'_y = xz'_u + z'_v$. Vidare,

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (yz'_u)'_x = y(z'_u)'_x = y^2 z''_{uu},$$
$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (yz'_u)'_y = z'_u + y(z'_u)'_y = z'_u + xyz''_{uu} + yz''_{uv}.$$

Insättning i differentialekvationen ger efter förenkling $y^3 z'_u - y^3 z''_{uv} = 0$, vilket är ekvivalent med $z''_{uv} - z'_u = 0$ eftersom $y > 0$. Sätt $w = z'_u$. Vår ekvation är då $w'_v - w = 0$, som löses med integrerande faktor: $(e^{-v} w)'_v = 0$, som ger $w = e^v f(u)$. Integration m.a.p. u ger sedan $z = e^v F(u) + G(v)$, där F och G är $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel och $F' = f$.

Allmän lösning till differentialekvationen är således $z(x, y) = e^y F(xy) + G(y)$.

Bivillkoret ger nu $0 = z(x, x) = e^x F(x^2) + G(x)$ då $x > 0$, d.v.s. $G(t) = -e^t F(t^2)$ då $t > 0$, och därmed får vi lösningarna $z(x, y) = e^y F(xy) - e^y F(y^2)$.

Svar: $z(x, y) = e^y \big(F(xy) - F(y^2)\big)$, $F \in \mathcal{C}^2$.