Linköpings universitet
Matematiska institutionen

**Kurskod: TATA43**
**Provkod: TEN1**

# Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

**2015-06-03 kl 14–19**

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Beräkna $\iiint_D (x+y)\,dxdydz$, där $D$ ges av $0 \le x-y \le y+z \le 1$ och $0 \le x-z \le 1$.

2. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till
$$f(x,y) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2y^2 + 4xy.$$

3. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna $z = x^2+y^2$ och $2x-4y+z=4$.

4. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av $x+y+z^2$ då $x^2+y^2+z^2 \le 2$ och $z \le 1$.

5. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-lösningar $u(x,y,z)$ till följande differentialekvationssystem:
$$\begin{cases} u'_x = 2\sin^2 y - z \\ u'_y = 2x\sin 2y - z\sin y \end{cases}$$
med bivillkoret $u(x,0,x) = x$ för alla $x \in \mathbf{R}$.

6. Visa att
   (a) sambandet
   $$yz^3 + e^{xz} - 3x^2y = 3$$
   implicit definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $x = f(y,z)$ i en omgivning till punkten $(0,2,1)$,
   (b) ekvationssystemet
   $$\begin{cases} yz^3 + e^{xz} - 3x^2y = 3 \\ \ln(x+y) + x^2yz = \ln 2 \end{cases}$$
   implicit definierar $\mathcal{C}^1$-funktioner $x = g(y)$, $z = h(y)$ i en omgivning till $(0,2,1)$,
   (c) avbildningen
   $$\begin{cases} u = x+y+z \\ v = xy+yz+zx \\ w = x^3+y^3+z^3 \end{cases}$$
   har en lokal $\mathcal{C}^1$-invers kring varje punkt $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ sådan att $x \ne y$, $y \ne z$ och $z \ne x$.

   För full poäng krävs att man verifierar att alla förutsättningar är uppfyllda i de satser som används.

7. Antag att $\mathcal{C}^1$-funktionen $F(x,y)$ är definierad för alla $x>0$, $y>0$ och att alla nivåkurvor till $F(x,y)$ skär alla nivåkurvor till $x^2-y^2$ under rät vinkel. Visa att $F(x,y) = g(xy)$, där $g$ är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion.

**Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2015-06-03**

1. Det linjära variabelbytet

$$\begin{cases} u = x - y, \\ v = y + z, \\ w = x - z, \end{cases} \qquad \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad dudvdw = \big|-2\big|\, dxdydz = 2\, dxdydz,$$

ger nytt område $E:\ 0 \le u \le v \le 1,\ 0 \le w \le 1$, och, med skivor på fixa $w$-nivåer,

$$\iiint_D (x+y)\, dxdydz = \iiint_E (v+w)\frac{dudvdw}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^v (v+w)\, du\right) dv\right) dw$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^1 (v^2 + vw)\, dv\right) dw = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{w}{2}\right) dw = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{24}.$$

2. De stationära punkterna fås ur $f'_x = 2x^2 - 2x + 4y = 0$ och $f'_y = -4y + 4x = 0$. Den andra ekvationen ger genast $y = x$, som insatt i den första ger $2x^2 + 2x = 0$, d.v.s. $x = 0$ eller $x = -1$. De stationära punkterna är således $(0,0)$ och $(-1,-1)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 4x - 2$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = -4$.

   I $(0,0)$ blir $f''_{xx} = -2$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = -4$, och den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$
$$= -2h^2 + 8hk - 4k^2 = -4(k-h)^2 + 2h^2$$

   är indefinit eftersom t.ex. $Q(1,1) = 2 > 0$ medan $Q(0,1) = -4 < 0$, så punkten $(0,0)$ är ingen lokal extrempunkt för $f$.

   I $(-1,-1)$ blir $f''_{xx} = -6$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = -4$, och vi får den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = -6h^2 + 8hk - 4k^2 = -4(k-h)^2 - 2h^2$$

   som är negativt definit eftersom $Q(h,k) \le 0$ för alla $(h,k)$ och $Q(h,k) = 0$ endast om $k - h = 0$ och $h = 0$, d.v.s. endast om $(h,k) = (0,0)$. Således är punkten $(-1,-1)$ en lokal maximipunkt för $f$.

   <u>Svar</u>: $(-1,-1)$ är en lokal maximipunkt. Lokala minimipunkter saknas.

3. Ytorna skär varandra längs kurvan där $z = x^2 + y^2$ och $z = 4 - 2x + 4y$ samtidigt, och denna kurvas projektion på $xy$-planet är kurvan $x^2 + y^2 = 4 - 2x + 4y$, d.v.s. cirkeln $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$. Låt $D$ vara den aktuella kroppen; dess projektion $\tilde{D}$ på $xy$-planet är cirkelskivan $(x+1)^2 + (y-2)^2 \le 9$. Med i tur och ordning (1) stavar $x^2 + y^2 \le z \le 4 - 2x + 4y$ i $z$-led; (2) linjärt byte $u = x + 1$, $v = y - 2$ som överför $\tilde{D}$ till en ny mängd $\tilde{E}:\ u^2 + v^2 \le 9$ och ger $dxdy = dudv$; och (3) planpolärt byte $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$ med ny mängd $0 \le \rho \le 3$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ och $dudv = \rho\, d\rho d\varphi$, får vi att

$$\text{volym}(D) = \iiint_D dxdydz \overset{(1)}{=} \iint_{\tilde{D}} \big((4 - 2x + 4y) - (x^2 + y^2)\big)\, dxdy \overset{(2)}{=} \iint_{\tilde{E}} (9 - u^2 - v^2)\, dudv$$
$$\overset{(3)}{=} \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)(9 - \rho^2)\rho\, d\rho = 2\pi \left[\frac{(9-\rho^2)^2}{-4}\right]_0^3 = \frac{81\pi}{2}.$$

4. De två bivillkoren $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \le 2$ och $h(x,y,z) = z \le 1$ bestämmer en sluten delmängd av ett slutet klot – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y,z) = x + y + z^2$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för $f$ på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (1, 1, 2z)$, $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ och $\nabla h = (0, 0, 1)$. Kandidatjakt:

- Kandidater i kroppen $g < 2$, $h < 1$ finns där $\nabla f = \mathbf{0}$, d.v.s. ingenstans. Inga kandidater här.
- Kandidater på ytan $g = 2$, $h < 1$ finns där

  $$\nabla f \parallel \nabla g \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{0} = \nabla f \times \nabla g = (2z - 4yz, 4xz - 2z, 2y - 2x) \quad \Leftrightarrow \quad (2x-1)z = 0 \text{ och } y = x.$$

  Fallet $z = 0$ ger vid insättning i $g = 2$ att $2x^2 + 0 = 2$, d.v.s. $x = \pm 1$, och kandidaterna $f(1,1,0) = 2$ och $f(-1,-1,0) = -2$. Fallet $x = 1/2$ ger på samma sätt $(1/2)^2 + (1/2)^2 + z^2 = 2$, d.v.s. $z = \pm\sqrt{3/2}$, och kandidaten $f(1/2, 1/2, -\sqrt{3/2}) = 5/2$ (punkten $(1/2, 1/2, \sqrt{3/2})$ uppfyller inte kravet $h < 1$).
- Kandidater på ytan $h = 1$, $g < 2$ finns där $\nabla f \parallel \nabla h$, d.v.s. ingenstans. Inga kandidater här.
- Kandidater på kurvan $g = 2$, $h = 1$, slutligen, finns där $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ är linjärt beroende, d.v.s. där

  $$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2z \\ 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2y - 2x,$$

  d.v.s. där $y = x$. Insättning i $h = 1$ och $g = 2$ ger $z = 1$ och $2x^2 + 1 = 2$ och därmed kandidaterna $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1) = 1 + \sqrt{2}$ och $f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1) = 1 - \sqrt{2}$.

  <u>Svar</u>: $f_{\max} = f(1/2, 1/2, -\sqrt{3/2}) = 5/2$, $f_{\min} = f(-1,-1,0) = -2$.

5. Integration av den första ekvationen m.a.p. $x$ ger $u = 2x\sin^2 y - xz + f(y,z)$, och derivering av $u$ m.a.p. $y$ och insättning i den andra ekvationen ger $2x \cdot 2\sin y \cos y + f'_y(y,z) = 2x\sin 2y - z\sin y$, d.v.s. $f'_y(y,z) = -z\sin y$ (eftersom $\sin 2y = 2\sin y\cos y$), varför $f(y,z) = z\cos y + h(z)$. Således är $u(x,y,z) = 2x\sin^2 y - xz + z\cos y + h(z)$, och bivillkoret ger nu $x = u(x,0,x) = -x^2 + x + h(x)$, $x \in \mathbf{R}$, d.v.s. $h(t) = t^2$, $t \in \mathbf{R}$, och därmed är $u(x,y,z) = 2x\sin^2 y - xz + z\cos y + z^2$.

   <u>Svar</u>: $u(x,y,z) = 2x\sin^2 y - xz + z\cos y + z^2$.

6. Låt i (a) och (b) $F(x,y,z) = yz^3 + e^{xz} - 3x^2y$ och $G(x,y,z) = \ln(x+y) + x^2yz$. Då är $F$ och $G$ $\mathcal{C}^1$-funktioner i en omgivning till punkten $P = (0,2,1)$, och $F(0,2,1) = 3$ och $G(0,2,1) = \ln 2$.

   (a) Eftersom $F'_x = z\,e^{xz} - 6xy = 1 \neq 0$ i $P$ medför implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x,y,z) = 3$ i en omgivning till $(0,2,1)$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $x = f(y,z)$.

   (b) Eftersom

   $$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)} = \begin{pmatrix} F'_x & F'_z \\ G'_x & G'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\,e^{xz} - 6xy & 3yz^2 + x\,e^{xz} \\ (x+y)^{-1} + 2xyz & x^2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

   i $P$, och denna matris har determinant $-3 \neq 0$ och därmed är inverterbar, medför implicita funktionssatsen att ekvationssystemet $F(x,y,z) = 3$, $G(x,y,z) = \ln 2$ i en omgivning till $(0,2,1)$ definierar $\mathcal{C}^1$-funktioner $x = g(y)$ och $z = h(y)$.

   (c) Funktionerna $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$ och $w = x^3 + y^3 + z^3$ är alla $\mathcal{C}^1$, och

   $$\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y+z & x-y & x-z \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 3(x-y)(x-z)(y-z),$$

   där vi i steg 1 har brutit ut faktorn 3 från rad 3 och sedan subtraherat kolonn 1 från kolonn 2 och kolonn 3, och i steg 2 har brutit ut faktorn $(x-y)$ ur kolonn 2 och $(x-z)$ ur kolonn 3. Om $(x,y,z)$ är en punkt sådan att $x \neq y$, $y \neq z$ och $z \neq x$ är alltså funktionaldeterminanten $\neq 0$ där, och därför medför inversa funktionssatsen att det finns en lokal $\mathcal{C}^1$-invers $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ i en omgivning till punkten.

7. Låt $H(x,y) = x^2 - y^2$. Nivåkurvorna till $F(x,y)$ och $H(x,y)$ skär varandra vinkelrätt i en punkt $(x,y)$ precis då $\nabla F \perp \nabla H$, d.v.s. precis då $xF'_x - yF'_y = 0$. Med tanke på vad vi vill visa gör vi variabelbytet $u = xy$ och, t.ex., $v = x$; kedjeregeln medför att $0 = xF'_x - yF'_y = x(F'_u y + F'_v) - y(xF'_u) = xF'_v$ och därmed, eftersom $x > 0$, att $F'_v = 0$. Integration av denna ger $F = g(u)$, vilket i $x$ och $y$ blir $F(x,y) = g(xy)$, där $g$ är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel.