

## Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2015-01-07 kl 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).

8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Betrakta den parametriserade kurvan  $\begin{cases} x = t^3 - 2t \\ y = t^2 \end{cases}$  och funktionen

$$f(x, y) = 2 - \arctan(x^2 + 3y^2).$$

Hur snabbt ökar eller minskar  $f$  per längdenhet i kurvtangentens riktning i punkten  $(1, 1)$ ? I vilken riktning i denna punkt är förändringstakten maximal och hur stor är den då?

2. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y, z) = \frac{z}{y} - \frac{x}{z} - \frac{1}{x} + \ln y.$$

3. Beräkna volymen av den kropp i  $\mathbf{R}^3$  som begränsas av ytorna  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  och  $z = x^2 + y^2$ .
4. Bestäm de punkter  $P$  på kurvan  $x = y^2$  sådana att kurvans normallinje i  $P$  går genom punkten  $(2, -1)$ .

5. Beräkna

$$\iint_D \max(0, y^2 - xy) \, dx dy,$$

där  $D$  ges av  $x^2 + y^2 \leq 1$  och  $x \geq 0$ .

(Beteckningen  $\max(s, t)$  betyder som bekant det största av talen  $s$  och  $t$ .)

6. Visa att ekvationssystemet

$$z + \sin xyz = 1, \quad x^3 y^2 + xy + yz = 2$$

implicit definierar  $\mathcal{C}^1$ -funktioner  $x = f(z)$  och  $y = g(z)$  i en omgivning till punkten  $(x, y, z) = (0, 2, 1)$ . Ange också funktionsvärdena  $f(1)$  och  $g(1)$  samt derivatorna  $f'(1)$  och  $g'(1)$ .

7. Bestäm för alla värden på parametern  $c \geq 0$  största och minsta värdet, om de finns, av  $x^2 + y^2 + z^2$  då  $z^2 \geq x^2 + y^2$  och  $x + cz = 1$ .

### Lösningsskisser till TATA43 Flervariabelanalys 2015-01-07

1. Kurvan  $(x(t), y(t)) = (t^3 - 2t, t^2)$  passerar punkten  $(1, 1)$  då  $t^3 - 2t = 1$  och  $t^2 = 1$ , dvs. då  $t = -1$ . Kurvans tangentvektor  $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 - 2 \\ 2t \end{pmatrix}$  är därför i den punkten lika med  $\begin{pmatrix} x'(-1) \\ y'(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Enhetsvektorn i denna riktning är  $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , och gradienten av  $f(x, y) = 2 - \arctan(x^2 + 3y^2)$  är  $\nabla f(x, y) = \frac{-2}{1+(x^2+3y^2)^2} \begin{pmatrix} x \\ 3y \end{pmatrix}$ , så den efterfrågade riktningens derivatan är

$$f'_{\mathbf{v}}(1, 1) = \mathbf{v} \cdot \nabla f(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{-2}{17} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{10}{17\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{17}.$$

Riktningens derivatan är som störst i gradientens riktning (alltså den riktning som ges av vektorn  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ) och dess maximala värde är  $|\nabla f(1, 1)| = \left| \frac{-2}{17} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \frac{2\sqrt{10}}{17}$ .

**Svar:** Funktionen ökar med hastigheten  $2\sqrt{5}/17$  enheter per längdenhet när man går i kurvtangentens riktning. Den maximala förändringstakten är  $2\sqrt{10}/17$  och sker i riktningen  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

2. Funktionen  $f(x, y, z) = \frac{z}{y} - \frac{x}{z} - \frac{1}{x} + \ln y$  är definierad för  $x \neq 0$ ,  $y > 0$ ,  $z \neq 0$ , och dess gradient är

$$\nabla f(x, y, z) = \left( -\frac{1}{z} + \frac{1}{x^2}, -\frac{z}{y^2} + \frac{1}{y}, \frac{1}{y} + \frac{x}{z^2} \right).$$

Stationära punkter ges av  $\nabla f = \mathbf{0}$ , dvs.  $x^2 = z$ ,  $y^2 = yz$ ,  $xy = -z^2$ . Den andra ekvationen säger (eftersom  $y > 0$ ) att  $y = z$ , vilket insatt i den tredje ger  $xz = -z^2$ . Eftersom  $z \neq 0$  så medför detta att  $x = -z$ , och ur den första ekvationen får vi till slut  $z = 1$ . Alltså är  $(x, y, z) = (-1, 1, 1)$  den enda stationära punkten för  $f$ . Andraderivatorna i denna punkt är  $f''_{xx} = \frac{-2}{x^3} = 2$ ,  $f''_{yy} = \frac{2z}{y^3} - \frac{1}{y^2} = 1$ ,  $f''_{zz} = \frac{-2x}{z^3} = 2$ ,  $f''_{xy} = 0$ ,  $f''_{xz} = \frac{1}{z^2} = 1$ ,  $f''_{yz} = \frac{-1}{y^2} = -1$ , så den kvadratiske formen i Taylorutvecklingen  $f(-1 + h, 1 + k, 1 + l) = f(-1, 1, 1) + 0h + 0k + 0l + \frac{1}{2}Q(h, k, l) + \mathcal{O}((h^2 + k^2 + l^2)^{3/2})$  blir

$$\begin{aligned} Q(h, k, l) &= 2h^2 + k^2 + 2l^2 + 0hk + 2hl - 2kl \\ &= (k - l)^2 + l^2 + 2h^2 + 2hl \\ &= (k - l)^2 + (l + h)^2 + h^2. \end{aligned}$$

Detta visar (enligt det vanliga resonemanget) att  $Q$  är positivt definit och att  $f$  därmed har ett lokalt minimum i den aktuella punkten.

**Svar:** Funktionen saknar lokala maximipunkter, men  $(-1, 1, 1)$  är en lokal minimipunkt.

3. Paraboloiden  $z = x^2 + y^2$  delar klotet  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6$  i två delar, en del  $D$  som ligger ovanför paraboloiden och en annan del  $E$  som ligger under. Vi beräknar volymen av  $D$  nedan. (Men vi godkänner även svar där man tolkat frågan som att det är volymen av  $E$  som söks.)

Låt  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  som vanligt. Sfären  $\rho^2 + z^2 = 6$  och paraboloiden  $z = \rho^2$  skär varandra längs den cirkel som ges av  $z = 2$  och  $\rho = \sqrt{2}$  (vilket man

ser genom att lösa ekvationen  $z + z^2 = 6$  där  $z = \rho^2 \geq 0$ ). Kroppen  $D$  avgränsas alltså av ett "tak" som består av den del av sfären som ligger ovanför höjden  $z = 2$ , och ett "golv" som består av den del av paraboloiden som ligger under höjden  $z = 2$ .

Tvårsnitten  $D_z$  för fixt  $z \in [0, \sqrt{6}]$  är cirkelskivor, vars areor  $\pi\rho^2$  förstås är lätta att beräkna; man behöver bara ta hänsyn till att det blir olika beroende på om man snittar i taket (där radien blir  $\rho = \sqrt{6 - z^2}$ ) eller i golvet (där radien blir  $\rho = \sqrt{z}$ ):

$$\begin{aligned} \text{Volym}(D) &= \iiint_D dx dy dz = \int_0^{\sqrt{6}} \left( \iint_{D_z} dx dy \right) dz = \int_0^{\sqrt{6}} \text{Area}(D_z) dz \\ &= \int_0^2 \pi(\sqrt{z})^2 dz + \int_2^{\sqrt{6}} \pi(\sqrt{6 - z^2})^2 dz \\ &= \pi \int_0^2 z dz + \pi \int_2^{\sqrt{6}} (6 - z^2) dz = \pi \left( 4\sqrt{6} - \frac{22}{3} \right). \end{aligned}$$

Alternativt kan man beräkna volymen genom att dela upp kroppen i stavar som löper i  $z$ -led från golvet till taket, ovanför kroppens projektion  $E$  i  $xy$ -planet, som är en cirkelskiva med radien  $\sqrt{2}$  (enligt skärningsberäkningen vi gjorde i början). Integrationen över  $E$  utförs lämpligen med hjälp av polära koordinater:

$$\begin{aligned} \text{Volym}(D) &= \iiint_D dx dy dz = \iint_E \left( \int_{z=x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dz \right) dx dy \\ &= \iint_E \left( \sqrt{6 - x^2 - y^2} - (x^2 + y^2) \right) dx dy \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left( \sqrt{6 - \rho^2} - \rho^2 \right) \rho d\rho = 2\pi \left( 2\sqrt{6} - \frac{11}{3} \right). \end{aligned}$$

**Svar:**  $2\pi \left( 2\sqrt{6} - \frac{11}{3} \right)$ .

4. Kurvan  $x = y^2$  är en nivåkurva till  $F(x, y) = x - y^2$ , så dess normallinje  $N$  i punkten  $P = (a, b)$  har riktningsvektorn  $\nabla F(a, b) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2b \end{pmatrix}$ . Kravet för att linjen  $N$  ska gå genom punkten  $(2, -1)$  är att dess riktningsvektor är parallell med den vektor som går mellan punkterna  $(2, -1)$  och  $(a, b)$ , alltså att  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2b \end{pmatrix}$  är parallell med  $\begin{pmatrix} a-2 \\ b+1 \end{pmatrix}$ :

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & a-2 \\ -2b & b+1 \end{pmatrix} = (b+1) + 2b(a-2) = 2ab - 3b + 1.$$

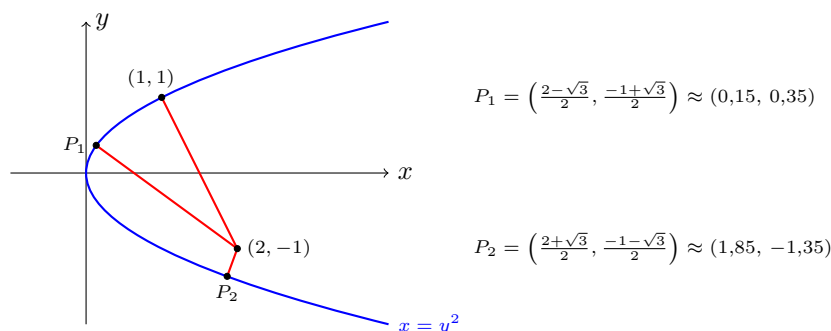
Insättning av villkoret  $a = b^2$  (punkten  $(a, b)$  ska ju ligga på kurvan) ger en tredjegrads ekvation där det är lätt att gissa en av rötterna (nämligen  $b = 1$ ):

$$0 = 2b^3 - 3b + 1 = (b-1)(2b^2 + 2b - 1).$$

De andra två rötterna blir därmed  $b = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$ . Kvadrering av de funna värdena för  $b$  ger motsvarande värden för  $a$ .

**Svar:** Punkterna är  $(1, 1)$ ,  $\left( \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right)$  och  $\left( \frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \right)$ .

Anm.: Man kan enkelt kontrollera att svaret är rimligt med hjälp av närmevärdet  $\sqrt{3} \approx 1,7$  och följande figur:



5. Linjerna  $y = 0$  och  $y = x$  delar in halvcirkelskivan  $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$  i tre delar,

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in D : y \leq 0\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \in D : 0 < y < x\}, \\ D_3 &= \{(x, y) \in D : x \leq y\}, \end{aligned}$$

där  $y^2 - xy = y(y - x) \geq 0$  om  $(x, y) \in D_1$  eller  $(x, y) \in D_3$ , medan  $y^2 - xy < 0$  om  $(x, y) \in D_2$ . Alltså får vi, med hjälp av polära koordinater,

$$\begin{aligned} & \iint_D \max(0, y^2 - xy) \, dx dy \\ &= \iint_{D_1} (y^2 - xy) \, dx dy + \iint_{D_2} 0 \, dx dy + \iint_{D_3} (y^2 - xy) \, dx dy \\ &= \int_{\varphi=-\pi/2}^0 \left( \int_{\rho=0}^1 (\rho^2 \sin^2 \varphi - \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi) \rho \, d\rho \right) d\varphi \\ &\quad + 0 + \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \left( \int_{\rho=0}^1 (\rho^2 \sin^2 \varphi - \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi) \rho \, d\rho \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^0 (\sin^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi) d\varphi + \frac{1}{4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

En primitiv funktion till

$$g(\varphi) = \sin^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi - \cos \varphi \sin \varphi$$

är

$$G(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi,$$

så integralens värde blir

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} [G(\varphi)]_{-\pi/2}^0 + \frac{1}{4} [G(\varphi)]_{\pi/4}^{\pi/2} &= \frac{1}{4} \left( (0 - 0 - 0) - \left( -\frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{2} \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left( \left( \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \right). \end{aligned}$$

**Svar:**  $\frac{1}{8} + \frac{3\pi}{32}$ .

6. Sätt  $F(x, y, z) = z + \sin xyz$  och  $G(x, y, z) = x^3 y^2 + xy + yz$ . Då är  $F$  och  $G$  funktioner av klass  $C^1$  (eftersom de är bildade genom sammansättning av elementära funktioner), punkten  $(x, y, z) = (0, 2, 1)$  uppfyller ekvationssystemet  $F(x, y, z) = 1$ ,  $G(x, y, z) = 2$ , och determinanten

$$\det \begin{pmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} yz \cos xyz & xz \cos xyz \\ 3x^2 y^2 + y & 2x^3 y + x + z \end{pmatrix}$$

har i punkten  $(0, 2, 1)$  värdet

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Förutsättningarna för implicita funktionsatsen är alltså uppfyllda, och den säger att ekvationssystemet  $F = 1$ ,  $G = 2$  implicit definierar funktioner  $x = f(z)$  och  $y = g(z)$  i en omgivning av punkten  $(0, 2, 1)$ , vilket skulle visas. Per definition är  $f(1) = 0$  och  $g(1) = 2$ , och implicit derivering av identiteterna  $F = 1$ ,  $G = 2$  ger

$$\begin{pmatrix} yz \cos xyz & xz \cos xyz \\ 3x^2 y^2 + y & 2x^3 y + x + z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx/dz \\ dy/dz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + xy \cos xyz \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

där  $x = f(z)$  och  $y = g(z)$ . Insättning av  $z = 1$  ger

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(1) \\ g'(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

alltså  $f'(1) = -1/2$  och  $g'(1) = -1$ .

**Svar:** Bevis enligt ovan. De efterfrågade värdena är  $f(1) = 0$ ,  $g(1) = 2$ ,  $f'(1) = -1/2$ ,  $g'(1) = -1$ .

7. Målfunktionen  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  är avståndet i kvadrat från  $(x, y, z)$  till origo, alltså en kontinuerlig funktion. Låt  $M_c$  för  $c \geq 0$  vara den mängd i  $\mathbf{R}^3$  som bestäms av bivillkoren  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \leq 0$  och  $h(x, y, z) = x + cz = 1$ ;  $M_c$  är *sluten*, men det är inte säkert att den är *begränsad*.

$$\begin{cases} g \leq 0 \\ h = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - c^2)z^2 + 2cz \geq y^2 + 1 & (1) \\ x = 1 - cz & (2) \end{cases}$$

När  $0 \leq c \leq 1$  ser vi, för givet  $y \in \mathbf{R}$ , att (1) är uppfyllt för alla tillräckligt stora positiva  $z$ , och insättning i (2) ger tillhörande  $x$ ;  $M_c$  är alltså en obegränsad mängd.  $f(x, y, z) \geq z^2$  och kan därför bli hur stor som helst på  $M_c$ , så  $f_{\max}$  existerar inte. Däremot existerar  $f_{\min}$  eftersom skärningen mellan  $M_c$  och ett tillräckligt stort klot  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  är en icke-tom kompakt mängd  $K$  och  $f$  är stor på  $M_c \setminus K$ .

När  $c > 1$  är

$$(1) \iff y^2 + (c^2 - 1) \left( z - \frac{c}{c^2 - 1} \right)^2 \leq \frac{1}{c^2 - 1},$$

en ellipsskiva i variablerna  $y$  och  $z$ , och därmed är dessa variabler begränsade i  $M_c$ ; från (2) ser vi sedan att även  $x$  är begränsad i  $M_c$ , som är alltså är en begränsad mängd.  $M_c$  är således kompakt, och därför existerar både  $f_{\max}$  och  $f_{\min}$ .

De punkter där minsta och, om  $c > 1$ , största värde antas fås nu med sedvanlig kandidatjakt. Gradienter:  $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$ ,  $\nabla g = (2x, 2y, -2z)$  och  $\nabla h = (1, 0, c)$ .

- Kandidater i ytan  $g < 0$ ,  $h = 1$  finns där  $\nabla f \parallel \nabla h$ , alltså där  $y = 0$  och  $z = cx$ . Bivillkoret  $g < 0$  kan nu skrivas  $(1 - c^2)x^2 < 0$ , och är uppfyllt precis då  $c > 1$  och  $x \neq 0$ . Endast när  $c > 1$  får vi därför en kandidat, nämligen  $f(\frac{1}{c^2+1}, 0, \frac{c}{c^2+1}) = 1/(c^2 + 1)$ .
- Kandidater på kurvan  $g = 0$ ,  $h = 1$  finns där  $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$  är linjärt beroende, d.v.s. där

$$0 = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -2z \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4z \\ 2x & 2y & -2z \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} = -8yz,$$

alltså  $y = 0$  eller  $z = 0$ . Fallet  $z = 0$  insatt i  $g = 0$  ger  $x = 0 = y$ , men  $h(0, 0, 0) = 0 \neq 1$ . Fallet  $y = 0$  insatt i  $g = 0$  ger  $x = \pm z$ , och delfallet  $x = z$  insatt i  $h = 1$  ger kandidaten  $f(\frac{1}{c+1}, 0, \frac{1}{c+1}) = 2/(c+1)^2$  medan delfallet  $x = -z$  insatt i  $h = 1$  ger kandidaten  $f(\frac{-1}{c-1}, 0, \frac{1}{c-1}) = 2/(c-1)^2$  om  $c \neq 1$ ; notera att  $2/(c+1)^2 \leq 2/(c-1)^2$  när  $c \geq 0$  och  $c \neq 1$ .

Notera slutligen att  $2/(c+1)^2 - 1/(c^2+1) = (c-1)^2/((c+1)^2(c^2+1)) > 0$  när  $c > 1$ .

**Svar:** Om  $0 \leq c \leq 1$ : max saknas, min =  $2/(c+1)^2$ .

Om  $c > 1$ : max =  $2/(c-1)^2$ , min =  $1/(c^2+1)$ .