Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2014-10-22 kl 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till $f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy$.

2. Kroppen K ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, där $R > 0$ samt $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$. Bestäm tyngdpunktens y-koordinat:
$$y_T = \iiint_K y\,dxdydz \Big/ \iiint_K dxdydz.$$

3. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av $xy - 2x$ då $x^2 + y^2 \leq 12$ och $x + y \leq 0$.

4. Bestäm samtliga punkter på ytan
$$z = x^2 + 4y^2,$$
där tangentplanet till ytan innehåller linjen $(x,y,z) = (2,0,0) + t(1,1,-4)$, $t \in \mathbf{R}$.

5. Beräkna
$$\iint_D (x-y)\big|\ln(x+2y)\big|\,dxdy,$$
där D är triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,1)$ och $(-3,3)$.

6. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-lösningar $z(x,y)$ till differentialekvationen
$$x^2 z''_{xx} - 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy} + 2yz'_y = 6x^3, \quad x > 0,\ y > 0,$$
under bivillkoret $z(1,y) = y^2 + 1$, t.ex. genom att göra variabelbytet $u = xy$, $v = x$.

7. Visa att ekvationssystemet
$$\begin{cases} (e^u \cos v + u)\,x - (e^u \sin v + v)\,y = 2\pi + 1 \\ (e^u \cos v + u)\,y + (e^u \sin v + v)\,x = 2\pi - 1 \end{cases}$$
i en omgivning till punkten $(x,y,u,v) = (1,-1,0,2\pi)$ definierar $\mathcal{C}^1$-funktioner $u(x,y)$, $v(x,y)$. Beräkna också $u'_x(1,-1), u'_y(1,-1), v'_x(1,-1)$, och $v'_y(1,-1)$.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2014-10-22

1. De stationära punkterna fås ur $f'_x = 3x^2 + 3y = 0$ och $f'_y = -3y^2 + 3x = 0$. Den första ekvationen ger genast $y = -x^2$, som insatt i den andra ger $3x - 3x^4 = 0$, d.v.s. $3x(1 - x^3) = 0$, så $x = 0$ eller $x = 1$. De stationära punkterna är således $(0, 0)$ och $(1, -1)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = 3$ och $f''_{yy} = -6y$.

   I $(0, 0)$ blir $f''_{xx} = 0$, $f''_{xy} = 3$ och $f''_{yy} = 0$, och den kvadratiska formen

$$Q(h, k) = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 6hk$$

   är indefinit eftersom t.ex. $Q(1, 1) = 6 > 0$ medan $Q(-1, 1) = -6 < 0$, så punkten $(0, 0)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

   I $(1, -1)$ blir $f''_{xx} = 6$, $f''_{xy} = 3$ och $f''_{yy} = 6$, och vi får den kvadratiska formen

$$Q(h, k) = 6h^2 + 6hk + 6k^2 = 6(h + k/2)^2 + 9k^2/2$$

   som är positivt definit eftersom $Q(h, k) \geq 0$ för alla (h, k) och $Q(h, k) = 0$ endast om $h + k/2 = 0$ och $k = 0$, d.v.s. endast om $(h, k) = (0, 0)$. Således är punkten $(1, -1)$ en lokal minimipunkt för f.

   Svar: $(1, -1)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

2. Kroppen K är den åttondel av klotet med centrum i origo och radie R som finns i positiva oktanten. Nämnaren $\iiint_K dxdydz = \text{volym}(K) = \big(4\pi R^3/3\big)/8 = \pi R^3/6$, medan täljaren, med rymdpolärt byte $x = r \sin\theta \cos\varphi$, $y = r \sin\theta \sin\varphi$, $z = r \cos\theta$, $dxdydz = r^2 \sin\theta \, drd\theta d\varphi$ och ny mängd $E:\ 0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, blir, med omskrivningen $\sin^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$,

$$\begin{aligned} \iiint_K y \, dxdydz &= \int_0^R r^3 \, dr \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \, d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \, d\varphi \\ &= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} \Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^4}{16}, \text{ så } y_T = \frac{\pi R^4/16}{\pi R^3/6} = \frac{3R}{8}. \end{aligned}$$

3. De två bivillkoren $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 12$ och $h(x, y) = x + y \leq 0$ bestämmer en sluten halvcirkelskiva – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x, y) = xy - 2x$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (y - 2, x)$, $\nabla g = (2x, 2y)$ och $\nabla h = (1, 1)$. Kandidatjakt:

   - Kandidater i ytan $g < 12$, $h < 0$ finns där $\nabla f = \mathbf{0}$, d.v.s. där $(x, y) = (0, 2)$, men denna punkt ligger utanför mängden. Ingen kandidat här.
   - Kandidater på halvcirkeln $g = 12$, $h < 0$ finns där $\nabla f \parallel \nabla g$, d.v.s. där

$$0 = \begin{vmatrix} y - 2 & x \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y^2 - 4y - 2x^2,$$

     och eftersom dessutom $x^2 = 12 - y^2$ får vi $y^2 - y - 6 = 0$, alltså $y = 3$ eller $y = -2$. Fallet $y = 3$ ger $x = \pm\sqrt{3}$ och därmed punkterna $(\pm\sqrt{3}, 3)$, och fallet $y = -2$ ger på samma sätt punkterna $(\pm\sqrt{8}, -2)$; kontroll mot $h < 0$ ger att endast en av dessa fyra punkter är en kandidat: $f(-\sqrt{8}, -2) = 8\sqrt{2}$.
   - Kandidater på sträckan $h = 0$, $g < 12$ finns där $\nabla f \parallel \nabla h$, d.v.s. där $y - 2 = x$, som insatt i $h = 0$ och efter kontroll mot $g < 12$ ger kandidaten $f(-1, 1) = 1$.
   - Hörnpunkterna finns där $g = 12$, $h = 0$, och ur detta ekvationssystem får vi kandidaterna $f(\sqrt{6}, -\sqrt{6}) = -6 - 2\sqrt{6}$ och $f(-\sqrt{6}, \sqrt{6}) = -6 + 2\sqrt{6}$.

   Svar: $f_{\max} = f(-\sqrt{8}, -2) = 8\sqrt{2}$, $f_{\min} = f(\sqrt{6}, -\sqrt{6}) = -6 - 2\sqrt{6}$.

4. Sätt $F(x,y,z) = x^2 + 4y^2 - z$; då är den givna ytan nivåytan $F(x,y,z) = 0$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a,b,c) på ytan innehåller linjen $(x,y,z) = (2,0,0) + t(1,1,-4)$ precis då $\nabla F(a,b,c) \perp (1,1,-4)$, $\nabla F(a,b,c) \perp (a-2, b-0, c-0)$ och $F(a,b,c) = 0$, d.v.s. precis då

$$2a + 8b + 4 = 0, \quad 2a^2 - 4a + 8b^2 - c = 0 \quad \text{och} \quad a^2 + 4b^2 - c = 0.$$

Det första villkoret ger $a = -2 - 4b$, och det tredje insatt i det andra ger $c = 4a$; dessa båda samband insatta i det tredje villkoret ger $5b^2 + 8b + 3 = 0$, alltså $b = -1$ eller $b = -3/5$, och därmed de båda tangeringspunkterna $(2,-1,8)$ och $(2/5, -3/5, 8/5)$.

Svar: Tangeringspunkterna är $(2,-1,8)$ och $(2/5,-3/5,8/5)$.

5. Triangeln är en delmängd av halvplanet $y \geq x$, så integranden i den generaliserade integralen är ≤ 0 i hela D. Variabelbytet $u = y - x$, $v = x + 2y$ är därmed tillåtet, och ger triangeln $E: 0 \leq v \leq 3$, $0 \leq u \leq 2v$, samt $dxdy = dudv/3$. Vi får, i ett senare steg med partiell integration,

$$\begin{aligned}
\iint_D (x-y)|\ln(x+2y)|\,dxdy &= \iint_E (-u)|\ln v|\,\frac{dudv}{3} = -\frac{1}{3}\int_0^3 |\ln v| \left(\int_0^{2v} u\,du\right) dv \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^3 v^2|\ln v|\,dv = -\frac{2}{3}\left(\int_0^1 v^2(-\ln v)\,dv + \int_1^3 v^2 \ln v\,dv\right) \\
&= \frac{2}{27}\left(\left[v^3(3\ln v - 1)\right]_{v\to 0+}^{v=1} - \left[v^3(3\ln v - 1)\right]_{v=1}^{v=3}\right) = \frac{50}{27} - 6\ln 3.
\end{aligned}$$

6. $u = xy$ och $v = x$ ger $z'_x = yz'_u + z'_v$ och $z'_y = xz'_u$. Vidare,

$$\begin{aligned}
z''_{xx} &= (z'_x)'_x = (yz'_u + z'_v)'_x = y(z'_u)'_x + (z'_v)'_x = y(yz''_{uu} + z''_{uv}) + (yz''_{uv} + z''_{vv}), \\
z''_{xy} &= (z'_x)'_y = (yz'_u + z'_v)'_y = z'_u + y(z'_u)'_y + (z'_v)'_y = z'_u + xyz''_{uu} + xz''_{uv}, \\
z''_{yy} &= (z'_y)'_y = (xz'_u)'_y = x(z'_u)'_y = x^2 z''_{uu}.
\end{aligned}$$

Insättning i differentialekvationen ger efter förenkling $x^2 z''_{vv} = 6x^3$, d.v.s. $z''_{vv} = 6x = 6v$. Integrering ger $z'_v = 3v^2 + g(u)$ och $z = v^3 + v\,g(u) + h(u) = x^3 + x\,g(xy) + h(xy)$, där g och h är $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel.

Bivillkoret ger $y^2 + 1 = z(1,y) = 1 + g(y) + h(y)$ för $y > 0$, alltså $h(t) = t^2 - g(t)$ för $t > 0$, och lösningarna är således $z(x,y) = x^3 + (xy)^2 + (x-1)\,g(xy)$, där $g \in \mathcal{C}^2$.

Svar: $z(x,y) = x^3 + (xy)^2 + (x-1)\,g(xy)$, $g \in \mathcal{C}^2$.

7. Sätt $\varphi = e^u \cos v + u$ och $\psi = e^u \sin v + v$, samt $F = \varphi x - \psi y$ och $G = \varphi y + \psi x$. F och G är $\mathcal{C}^1$-funktioner, och vårt ekvationssystem kan skrivas $F = 2\pi + 1$, $G = 2\pi - 1$. Punkten $P = (x,y,u,v) = (1,-1,0,2\pi)$ uppfyller systemet, och

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_u x - \psi'_u y & \varphi'_v x - \psi'_v y \\ \varphi'_u y + \psi'_u x & \varphi'_v y + \psi'_v x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i } P.$$

Eftersom denna funktionalmatris är inverterbar medför implicita funktionssatsen att vårt ekvationssystem i en omgivning till P definierar $\mathcal{C}^1$-funktioner $u(x,y)$ och $v(x,y)$. I en omgivning till $(x,y) = (1,-1)$ gäller därför $F(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 2\pi + 1$, och derivering m.a.p. x ger $F'_x + F'_u u'_x + F'_v v'_x = 0$; analogt m.a.p. y, och för G. I matrisform kan dessa fyra ekvationer skrivas

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0,$$

varför, i punkten $(x,y) = (1,-1)$,

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2\pi \\ 2\pi & 1 \end{pmatrix},$$

så $u'_x = (2\pi - 1)/4$, $u'_y = (2\pi + 1)/4$, $v'_x = -(2\pi + 1)/4$ och $v'_y = (2\pi - 1)/4$ i denna punkt.

Svar: I $(1,-1)$ är $u'_x = (2\pi - 1)/4$, $u'_y = (2\pi + 1)/4$, $v'_x = -(2\pi + 1)/4$ och $v'_y = (2\pi - 1)/4$.