Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2014-08-21 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

1. Bestäm alla funktioner $f(x, y)$ av klass $\mathcal{C}^1$ som löser differentialekvationen
$$2xf'_x - yf'_y = xy,\ x > 0,\ y > 0$$
under bivillkoret $f(1, y) = 0$, exempelvis med hjälp av variabelbytet
$u = xy^2$, $v = y$.

2. Beräkna $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$, där D ges av $x^2 + xy + y^2 \leq 1$ och $x \geq 0$.

3. Visa att sambandet
$$3y^2 - 2x^3 - 6xyz + z^3 = -4$$
i en omgivning till punkten $(1, 1, 1)$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $z = z(x, y)$. Beräkna $z(1, 1)$, $z'_x(1, 1)$ och $z'_y(1, 1)$, samt bestäm tangentplanet till funktionsytan i punkten $(1, 1, 1)$.

4. Bestäm alla punkter P på kurvan
$$x^2 + y^3 = 1$$
sådana att kurvans normallinje i P går genom origo.

5. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av $3xy + z$ då $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och $z \geq 0$.

6. Beräkna
$$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$
där D är klotet med radie 1 och medelpunkt i $(0, 0, 1)$.

7. Bestäm alla a och b sådana att
$$f(x, y) = e^{ax} - x + bxy + 2y^2$$
har lokalt minimum i origo.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2014-08-21

1. Kedjeregeln ger $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = y^2 f'_u$ och $f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = 2xy f'_u + f'_v$, och insättning i differentialekvationen ger $-y f'_v = xy$ för $x > 0$, $y > 0$, d.v.s. $f'_v = -u/v^2$ för $u > 0$, $v > 0$, som integrerad ger $f = u/v + g(u) = xy + g(xy^2)$, där g är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Bivillkoret ger nu $0 = f(1,y) = y + g(y^2)$ då $y > 0$, så $g(t) = -\sqrt{t}$ för $t > 0$, och därmed får vi till sist $f(x,y) = xy - \sqrt{xy^2} = (x - \sqrt{x})y$ då $x > 0$ och $y > 0$.

   Svar: $f(x,y) = (x - \sqrt{x})y$.

2. Eftersom $x^2 + xy + y^2 = (y + x/2)^2 + (x\sqrt{3}/2)^2$ gör vi först det linjära bytet $u = x/2 + y$, $v = x\sqrt{3}/2$, som ger $dudv = |d(u,v)/d(x,y)|dxdy = (\sqrt{3}/2)\,dxdy$ och nytt område E, där $u^2 + v^2 \le 1$ och $v \ge 0$, och därefter det planpolära bytet $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$ med ny mängd $F : 0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi$ och $dudv = \rho\, d\rho d\varphi$, varför
$$\iint_D x\,dxdy = \iint_E \frac{2v}{\sqrt{3}}\frac{2\,dudv}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^2\,d\rho = \frac{4}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{9}.$$

3. Låt $F(x,y,z) = 3y^2 - 2x^3 - 6xyz + z^3$. Eftersom $F \in \mathcal{C}^1$, $F(1,1,1) = -4$ och $F'_z = 3z^2 - 6xy = -3 \ne 0$ i punkten $(1,1,1)$, så definierar ekvationen $F(x,y,z) = -4$ enligt implicita funktionssatsen en $\mathcal{C}^1$-funktion $z(x,y)$ i en omgivning till $(1,1,1)$. Per definition är $z(1,1) = 1$, och eftersom $3y^2 - 2x^3 - 6xy\,z(x,y) + z(x,y)^3 = -4$ för alla (x,y) i en omgivning till $(1,1)$, så ger derivering m.a.p. x att $-6x^2 - 6yz - 6xyz'_x + 3z^2 z'_x = 0$, så $z'_x = (6yz + 6x^2)/(3z^2 - 6xy)$; analogt får vi att $z'_y = (6xz - 6y)/(3z^2 - 6xy)$. Insättning ger $z'_x(1,1) = -4$ och $z'_y(1,1) = 0$, och tangentplanets ekvation är därmed $z = 1 - 4(x-1) + 0(y-1)$, d.v.s. $4x + z = 5$.

   Svar: $z(1,1) = 1$, $z'_x(1,1) = -4$, $z'_y(1,1) = 0$; tangentplanets ekvation är $4x + z = 5$.

4. Sätt $F(x,y) = x^2 + y^3$; då är den givna kurvan nivåkurvan $F(x,y) = 1$. Normalen till kurvan i punkten (a,b) på kurvan går genom origo precis då $\nabla F(a,b) \parallel (a-0, b-0)$, d.v.s. precis då
$$0 = \begin{vmatrix} 2a & 3b^2 \\ a & b \end{vmatrix} = ab(2-3b).$$
   Fallet $a = 0$ ger i $F(a,b) = 1$ att $(a,b) = (0,1)$, fallet $b = 0$ ger på samma sätt $(a,b) = (\pm 1, 0)$, medan fallet $b = 2/3$ ger $(a,b) = (\pm\sqrt{19/27}, 2/3)$.

   Svar: $(0,1)$, $(\pm 1, 0)$ och $(\pm\sqrt{19/27}, 2/3)$, totalt fem punkter.

5. De två bivillkoren $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ och $h(x,y,z) = z \ge 0$ bestämmer ett slutet halvklot – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y,z) = 3xy + z$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (3y, 3x, 1)$, $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ och $\nabla h = (0,0,1)$. Kandidatjakt:

   - Kandidater i kroppen $g < 1$, $h > 0$ finns där $\nabla f = \mathbf{0}$, d.v.s. ingenstans. Inga kandidater här.
   - Kandidater på ytan $g = 1$, $h > 0$ finns där $\nabla f \parallel \nabla g$, d.v.s. där

$$\mathbf{0} = \nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3y & 3x & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 3xz - y = 0 & \text{(1a)} \\ 3yz - x = 0 & \text{(1b)} \\ y^2 - x^2 = 0 & \text{(1c)} \end{cases}$$

Ekvation (1c) ger oss två fall: $y = x$ respektive $y = -x$.

Fallet $y = x$ insatt i (1a) och (1b) ger två identiska ekvationer: $3xz - x = 0$; denna ger nu två delfall: (i) $x = 0$ respektive (ii) $z = 1/3$. Delfall (i): Insättning av $x = 0$ i $g = 1$ ger $z^2 = 1$, d.v.s. $z = \pm 1$, och kontroll mot $h > 0$ ger kandidaten $f(0, 0, 1) = 1$. Delfall (ii): Insättning av $z = 1/3$ i $g = 1$ ger $2x^2 + 1/9 = 1$, d.v.s. $x = \pm 2/3$, och kontroll mot $h > 0$ ger kandidaterna $f(2/3, 2/3, 1/3) = f(-2/3, -2/3, 1/3) = 5/3$.

Fallet $y = -x$ insatt i (1a) och (1b) ger också två identiska ekvationer: $3xz + x = 0$; denna ger nu två delfall: $x = 0$ respektive $z = -1/3$, där det sista faller bort eftersom $h = z \not> 0$. Delfallet $x = 0$ ger p.s.s. som ovan kandidaten $f(0, 0, 1) = 1$ en gång till.

- Kandidater på ytan $h = 0$, $g < 1$ finns där $\nabla f \parallel \nabla h$, d.v.s. där $y = 0 = x$, och vi får efter insättning i $h = 0$ och kontroll mot $g < 1$ kandidaten $f(0, 0, 0) = 0$.
- Kandidater på kurvan $g = 1$, $h = 0$, slutligen, finns där $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ är linjärt beroende, d.v.s. där

$$0 = \begin{vmatrix} 3y & 3x & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6y^2 - 6x^2,$$

d.v.s. där $y = \pm x$. Insättning i $h = 0$ och $g = 1$ ger $z = 0$ och $2x^2 = 1$ och därmed de fyra kandidaterna $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) = f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) = 3/2$ och $f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) = f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) = -3/2$.

Svar: $f_{\max} = f(2/3, 2/3, 1/3) = f(-2/3, -2/3, 1/3) = 5/3$,
$f_{\min} = f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) = f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) = -3/2$.

6. Integralen är generaliserad i origo, men integranden är positiv, så variabelbyte och upprepad integration får användas.

   Klotet D ges av olikheten $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$, d.v.s. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$, som i rymdpolära koordinater blir $r^2 \leq 2r\cos\theta$. Rymdpolärt byte ger därför ny mängd E som bestäms av olikheterna $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ och $0 \leq r \leq 2\cos\theta$, och som vanligt är $dxdydz = r^2 \sin\theta \, drd\theta d\varphi$. Vi får

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \iiint_E \frac{r^2 \sin\theta \, drd\theta d\varphi}{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\theta} r \, dr \right) \sin\theta \, d\theta$$
$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} 2\cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = 4\pi \left[-\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{4\pi}{3}.$$

7. $\nabla f = (ae^{ax} - 1 + by, bx + 4y) = (a - 1, 0)$ i origo, och ett *nödvändigt* villkor för att f skall ha lokalt minimum i origo är att $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, d.v.s. att $a = 1$.

   Om nu $a = 1$, så ger Maclaurinutvecklingen $e^t = 1 + t + t^2/2 + t^3/6 + \mathcal{O}(t^4)$ och kvadratkomplettering att

$$f(x, y) = e^x - x + bxy + 2y^2 = 1 + \frac{1}{2}\big((x + by)^2 + (4 - b^2)y^2\big) + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4).$$

   Den kvadratiska formen $Q(x, y) = (x + by)^2 + (4 - b^2)y^2$ är positivt definit om $b^2 < 4$ och indefinit om $b^2 > 4$, så f har lokalt minimum i origo om $b^2 < 4$ men saknar lokalt extremvärde där om $b^2 > 4$. I de återstående fallen, $b = \pm 2$, är Q positivt semidefinit, och därför krävs vidare undersökning: Eftersom $f(bt, -t) = 1 + t^3\big(b^3/6 + \mathcal{O}(t)\big)$ då, och $b^3/6 \neq 0$, så antar $f(x, y)$ både större och mindre värden än $f(0, 0) = 1$ i varje omgivning till $(0, 0)$, så f saknar lokalt extremvärde i origo. Svar: $a = 1$, $-2 < b < 2$.