Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2014-01-07 kl. 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. (a) Bestäm alla funktioner $f(x,y)$ av klass $\mathcal{C}^1$ som löser differentialekvationen $f'_x + 2xf'_y = xy + x^3$. (Använd t.ex. variabelbytet $u = x$, $v = x^2 - y$.) (1p)
   (b) Bestäm speciellt alla som dessutom uppfyller bivillkoret $f(0,y) = y/2$. (1p)
   (c) Visa genom insättning att ditt svar i (b) verkligen uppfyller både differentialekvationen och bivillkoret! (1p)

2. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för
$$f(x,y,z) = 2xy + 2xz - y^2 - z^2 - x^3.$$

3. Beräkna $\iiint_D (x-z)\,dx\,dy\,dz$, där
$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \le x + 4y - z \le x + y \le y + z \le 1\Big\}.$$

4. Beräkna $\iint_D xy\,dx\,dy$, där området $D \subset \mathbf{R}^2$ ges av olikheterna $1 \le x^2 + 3y^2 \le 3$ och $0 \le y \le x$.

5. Visa att villkoren $xyz + e^{2x} = y$ och $x + 3y - z = 1$ implicit definierar x och y som $\mathcal{C}^1$-funktioner av z i en omgivning till punkten $(x,y,z) = (0,1,2)$. Ange värdena $x(2)$, $y(2)$, $x'(2)$ och $y'(2)$. Den geometriska tolkningen av situationen är att två ytor skär varandra längs en kurva; bestäm denna kurvas tangentlinje i punkten $(0,1,2)$.

6. Beräkna volymen av skärningen mellan den cirkulära cylindern
$$D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + z^2 \le 1\}$$
och den kvadratiska cylindern
$$D_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : |x| + |y| \le 1\}.$$

7. Vi vill tillverka en plåtlåda i form av ett rätblock (inklusive lock). Vi har 10 m^2 plåt och även 4 m vinkeljärn som behövs för att förstärka i nederkanten. Hur ska lådan byggas för att få så stor volym som möjligt, om alltså den totala ytarean ska vara 10 m^2, och bottenrektangelns omkrets högst får vara 4 m?

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2014-01-07

1. (a) Med $u = x$ och $v = x^2 - y$ fås enligt kedjeregeln $f'_x = f'_u + 2xf'_v$ och $f'_y = -f'_v$. Insättning av detta i PDE:n ger $(f'_u + 2xf'_v) + 2x(-f'_v) = xy + x^3$, alltså $f'_u = u(u^2 - v) + u^3 = 2u^3 - uv$. Integration med avseende på u ger $f(u, v) = u^4/2 - u^2v/2 + g(v)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Uttryckt i de ursprungliga koordinaterna har vi därmed svaret $f(x, y) = x^2y/2 + g(x^2 - y)$.

   (b) Bivillkoret $f(0, y) = y/2$ är uppfyllt om och endast om $0 + g(-y) = y/2$, dvs om $g(v) = -v/2$, dvs om $f(x, y) = x^2y/2 - (x^2 - y)/2$.

   Svar: (a) $f(x, y) = x^2y/2 + g(x^2 - y)$ (b) $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2y - x^2 + y)$.

2. För att hitta stationära punkter sätter vi gradienten av $f(x, y, z) = 2xy + 2xz - y^2 - z^2 - x^3$ till noll:
$$(2y + 2z - 3x^2, 2x - 2y, 2x - 2z) = (0, 0, 0).$$
Detta ger att $x = y = z$ och $2x + 2x - 3x^2 = 0$, alltså $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ eller $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$. Andraderivatorna är $f''_{xx} = -6x$, $f''_{yy} = f''_{zz} = -2$, $f''_{yz} = 0$ och $f''_{xy} = f''_{xz} = 2$, vilket på vanligt sätt ger de kvadratiska formerna $Q_{(0,0,0)}(h, k, l) = -2k^2 - 2l^2 + 4hk + 4hl = -2(k - h)^2 - 2(l - h)^2 + 4h^2$ (indefinit ty positiv för $(h, k, l) = (1, 1, 1)$ och negativ för $(h, k, l) = (0, 1, 0)$, så origo är en sadelpunkt) respektive $Q_{(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})}(h, k, l) = -8h^2 + Q_{(0,0,0)}(h, k, l) = -2(k - h)^2 - 2(l - h)^2 - 4h^2$ (negativt definit, så $f(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{32}{27}$ är ett lokalt maximum).

   Svar: $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ är en lokal maximipunkt för f. Lokala minimipunkter saknas.

3. Det linjära variabelbytet $u = x + 4y - z$, $v = x + y$, $w = y + z$ avbildar D på ett nytt område E som ges av $0 \le u \le v \le w \le 1$, och eftersom $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = -4$ så blir $du\,dv\,dw = 4\,dx\,dy\,dz$. Integranden $x - z$ ges i nya variabler av $v - w$ (som förresten är uppenbart negativt inuti E), så vi får $\iiint_D (x - z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{4}\iiint_E (v - w)\,du\,dv\,dw$, vilket går att räkna ut med upprepad integration på flera sätt, t.ex.
$$\frac{1}{4}\int_{w=0}^{1}\left(\int_{v=0}^{w}\left(\int_{u=0}^{v}(v - w)\,du\right)dv\right)dw.$$

   Svar: $-1/96$.

4. Linjärt byte $x = u$, $y = v/\sqrt{3}$, följt av övergång till polära koordinater i (u, v)-planet, ger
$$\iint\limits_{\substack{1\le x^2+3y^2\le 3\\ 0\le y\le x}} xy\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{1\le u^2+v^2\le 3\\ 0\le v/\sqrt{3}\le u}} u\,\frac{v}{\sqrt{3}}\,\frac{du\,dv}{\sqrt{3}} = \iint\limits_{\substack{0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}\\ 1\le\rho\le\sqrt{3}}} \frac{\rho\cos\varphi\,\rho\sin\varphi}{3}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \frac{1}{3}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^{\sqrt{3}}\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/3}.$$

   Svar: $1/4$.

5. Sätt $f(x,y,z) = xyz + e^{2x} - y$ och $g(x,y,z) = x + 3y - z$. Då är f och g av klass $\mathcal{C}^1$, punkten $(0,1,2)$ uppfyller villkoren $f = 0$ och $g = 1$, och i den punkten är

$$\frac{d(f,g)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} yz + 2e^{2x} & xz - 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 13 \neq 0,$$

så enligt implicita funktionssatsen definierar villkoren $\mathcal{C}^1$-funktioner $x(z)$ och $y(z)$ i en omgivning av $(0,1,2)$, vilket skulle visas. Per definition gäller $x(2) = 0$ och $y(2) = 1$, och derivatorna kan beräknas med implicit derivering: derivera identiteterna $f(x(z), y(z), z) = 0$ och $g(x(z), y(z), z) = 1$ med avseende på z och sätt $z = 2$, så erhålls ekvationssystemet $4x'(2) - y'(2) = 0$, $x'(2) + 3y'(2) - 1 = 0$, med lösningen $x'(2) = \frac{1}{13}$, $y'(2) = \frac{4}{13}$. Skärningskurvan mellan ytorna har parametriseringen $(x,y,z) = (x(s), y(s), s)$, så tangentvektorn $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds})$ i punkten $(0,1,2)$ (då $s = 2$) är $(x'(2), y'(2), 1) = (\frac{1}{13}, \frac{4}{13}, 1)$. Tangentlinjens ekvation på parameterform blir alltså $(x,y,z) = (0,1,2) + t(1,4,13)$. (Man kan även ta fram tangentlinjens riktningsvektor geometriskt, genom att kryssa ytornas normalvektorer: $\nabla f(0,1,2) \times \nabla g(0,1,2)$.)

Svar: Värdena är $x(2) = 0$, $y(2) = 1$, $x'(2) = \frac{1}{13}$, $y'(2) = \frac{4}{13}$. Tangentlinjen är $(x,y,z) = (0,1,2) + t(1,4,13)$.

6. Det finns många framkomliga sätt att beräkna denna integral. T.ex. kan man titta på den åttondel E av kroppen D som ligger i positiva oktanten och ta stavar i y-led. Projektionen av E på (x,z)-planet är en fjärdedel av enhetscirkelskivan, och staven vid en given punkt (x,z) är $0 \le y \le 1 - x$. Volymen av D är alltså

$$8 \iiint_E dx\,dy\,dz = 8 \iint_{\substack{x^2+z^2 \le 1 \\ x,z \ge 0}} (1 - x)\,dx\,dz = 8 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\int_{\rho=0}^{1} (1 - \rho\cos\varphi)\,\rho\,d\rho \right) d\varphi = 2\pi - \frac{8}{3}.$$

Eller så kan man göra skivor; t.ex. är tvärsnittet genom D för fixt x en rektangel med sidorna $2\sqrt{1-x^2}$ i z-led och $2(1 - |x|)$ i y-led, så volymen blir

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} 4\sqrt{1-x^2}\,(1 - |x|)\,dx &= 8 \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} \right) dx \\ &= 8\left(\tfrac{1}{4}(\text{Arean av enhetscirkeln}) + \left[\tfrac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 \right) = 2\pi - \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Svar: $2\pi - \frac{8}{3}$.

7. Låt rätblockets kantlängder vara x, y, z [m], där x och y är kantlängderna för bottenplattan. I första oktanten $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ bestämmer de två bivillkoren

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= xy + yz + zx = 5 \quad &\text{(total begränsningsarea för lådan är 10 [m}^2\text{])}, \\ h(x,y,z) &= x + y = 2c \quad &\text{(total kantlängd för bottenplattan är } 4c \text{ [m])}, \end{aligned}$$

där c är en parameter, $0 < c \leq 1$, en *sluten* mängd. Vidare, att $h = 2c$ medför att $x \leq 2c$ och $y \leq 2c$, och att $g = 5$ medför sedan att $z = (5 - xy)/2c \leq 5/2c$, så mängden vi optimerar på är också *begränsad*, och därmed *kompakt*. Målfunktionen $f(x,y,z) = xyz$ är kontinuerlig där, och alltså existerar största (och minsta) värde för f på denna mängd.

Vi får $\nabla f = (yz, xz, xy)$, $\nabla g = (y+z, x+z, x+y)$ och $\nabla h = (1,1,0)$. Eftersom $f \geq 0$, och $f = 0$ då någon av x, y, z är noll, antas maximum för givet $c > 0$ någonstans där $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $g = 5$, $h = 2c$ och $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ är linjärt beroende. Det sista villkoret ger

$$0 = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ y+z & x+z & x+y \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (y-x)z & xz & xy \\ y-x & x+z & x+y \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x-y)(xz + yz - xy),$$

d.v.s. $x = y$ eller $z = xy/(x+y) = xy/2c$.

Fallet $x = y$ ger insatt i $h = 2c$ och $g = 5$ att $x = c = y$ och $z = z_c = (5 - c^2)/2c$, och $z_c > 0$ när $0 < c < \sqrt{5}$, speciellt för $0 < c \leq 1$, så för dessa c får vi kandidaten $f(c, c, z_c) = (5c - c^3)/2$. Envariabelundersökning av $\varphi(c) = (5c - c^3)/2$ då $0 < c \leq 1$ ger, eftersom $\varphi'(c) = (5 - 3c^2)/2 > 0$ där, att φ är strängt växande på $]0, 1]$, så φ:s största värde är $\varphi(1) = f(1,1,2) = 2$.

Fallet $z = xy/2c$ ger insatt i $g = 5$ att $z = (5 - xy)/2c$, så $xy = 5/2$ och därmed $z = 5/4c$. Kravet $h = 2c$ ger $y = 2c - x$ som insatt i $xy = 5/2$ ger $(x - c)^2 = c^2 - 5/2$, som har lösning endast om $c \geq \sqrt{5/2} > 1$, så här finns inga kandidater.

Svar: Botten 1 m × 1 m, höjd 2 m, volym 2 m^3 (allt vinkeljärn utnyttjas).