Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2013-10-23 kl 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av $x+y+z$ då $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ och $z \leq 0$.

2. Bestäm alla punkter P på kurvan $x^4+x^2y^2+y^4=3$ sådana att kurvans normallinje i P går genom origo.

3. Beräkna
$$\iiint_D yz\,dxdydz,$$
där D ges av $x^2+y^2+4z^2 \leq 4$, $z \geq 0$ och $y \geq x$.

4. Betrakta en homogen cirkelsektor D med radie R och öppningsvinkel 2α, symmetriskt belägen kring x-axeln och med spetsen i origo. Bestäm tyngdpunktens x-koordinat, som vi betecknar med $x_T(\alpha)$. Beräkna även $\lim\limits_{\alpha\to 0} x_T(\alpha)$. Som bekant gäller
$$x_T(\alpha) = \frac{\iint_D x\,dxdy}{\iint_D 1\,dxdy}.$$

5. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-lösningar $z(x,y)$ till differentialekvationen
$$x^2 z''_{xx} - 4xyz''_{xy} + 4y^2 z''_{yy} + 6yz'_y = 6x^3 + 2x^4 y, \quad x > 0,$$
under bivillkoren $z(1,y) = 2y$ och $z'_x(1,y) = 0$ genom att till exempel göra variabelbytet $u = x$, $v = x^2 y$.

6. Avgör om följande funktioner har lokalt maximum eller lokalt minimum i origo.
   (a) $x \;\; + x^2 - 4xy + 5y^2$
   (b) $x^3 + x^2 - 4xy + 4y^2$
   (c) $x^4 + x^2 - 4xy + 4y^2$

7. Visa att sambandet $\begin{cases} u = 3x + \cos y, \\ v = y + \arctan x, \end{cases}$ kring varje punkt $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ definierar en lokal $\mathcal{C}^1$-invers $\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases}$ Undersök också om det finns en global invers?

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2013-10-23

1. De två bivillkoren $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och $h(x, y, z) = z \leq 0$ bestämmer ett slutet halvklot – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x, y, z) = x + y + z$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (1, 1, 1)$, $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ och $\nabla h = (0, 0, 1)$. Kandidatjakt:

   - Kandidater i kroppen $g < 1$, $h < 0$ finns där $\nabla f = \mathbf{0}$, d.v.s. ingenstans. Inga kandidater här.
   - Kandidater på ytan $g = 1$, $h < 0$ finns där $\nabla f \parallel \nabla g$, d.v.s. där $x = y = z$. Insättning i $g = 1$ ger $3x^2 = 1$, alltså $x = \pm 1/\sqrt{3}$, som efter kontroll mot $h < 0$ ger kandidaten $f(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$.
   - Kandidater på ytan $h = 0$, $g < 1$ finns där $\nabla f \parallel \nabla h$, d.v.s. ingenstans. Inga kandidater här.
   - Kandidater på kurvan $g = 1$, $h = 0$, slutligen, finns där $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ är linjärt beroende, d.v.s. där
   $$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(y - x),$$
   d.v.s. där $y = x$. Insättning i $h = 0$ och $g = 1$ ger $z = 0$ och $2x^2 = 1$ och därmed kandidaterna $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}$ och $f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) = -\sqrt{2}$.

   <u>Svar</u>: $f_{\max} = f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}$, $f_{\min} = f(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$.

2. Sätt $F(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$; då är den givna kurvan nivåkurvan $F(x, y) = 3$. Normalen till kurvan i punkten (a, b) på kurvan går genom origo precis då $\nabla F(a, b) \parallel (a - 0, b - 0)$, d.v.s. precis då
   $$0 = \begin{vmatrix} 4a^3 + 2ab^2 & 2a^2b + 4b^3 \\ a & b \end{vmatrix} = 2ab(a^2 - b^2).$$
   Fallet $a = 0$ ger i $F(a, b) = 3$ att $(a, b) = (0, \pm\sqrt[4]{3})$, fallet $b = 0$ ger på samma sätt $(a, b) = (\pm\sqrt[4]{3}, 0)$, medan fallet $a^2 = b^2$ ger $(a, b) = (\pm 1, \pm 1)$ (fyra punkter).

   <u>Svar</u>: $(0, \pm\sqrt[4]{3})$, $(\pm\sqrt[4]{3}, 0)$ och $(\pm 1, \pm 1)$ (fyra punkter), totalt åtta punkter.

3. Linjärt byte $u = x$, $v = y$, $w = 2z$ med (lokal) volymskala $|d(u, v, w)/d(x, y, z)| = 2$ så att $dxdydz = dudvdw/2$ och nytt område $E : u^2 + v^2 + w^2 \leq 4$, $w \geq 0$, $v \geq u$, följt av rymdpolärt byte $u = r \sin\theta \cos\varphi$, $v = r \sin\theta \sin\varphi$, $w = r \cos\theta$, med $dudvdw = r^2 \sin\theta \, drd\theta d\varphi$ och gränser $F : 0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $\pi/4 \leq \varphi \leq 5\pi/4$, ger
   $$\iiint_D yz \, dxdydz = \iiint_E \frac{vw}{2} \frac{dudvdw}{2} = \frac{1}{4} \int_0^2 r^4 \, dr \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta \cdot \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin\varphi \, d\varphi$$
   $$= \frac{1}{4} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^2 \left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_0^{\pi/2} [-\cos\varphi]_{\pi/4}^{5\pi/4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{32}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

4. Nämnaren $\iint_D 1 \, dxdy = \text{area}(D) = \alpha R^2$, och täljaren blir – om vi lägger sektorn i högra halvplanet (i annat fall byter $x_T(\alpha)$ tecken) – med planpolära koordinater $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$ med $dxdy = \rho \, d\rho d\varphi$ och nya gränser $E : 0 \leq \rho \leq R$, $-\alpha \leq \varphi \leq \alpha$,
   $$\iint_D x \, dxdy = \iint_E \rho \cos\varphi \, \rho \, d\rho d\varphi = \int_0^R \rho^2 \, d\rho \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{2R^3 \sin\alpha}{3},$$

så

$$x_T(\alpha) = \frac{2R}{3} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \to \frac{2R}{3} \quad \text{då } \alpha \to 0.$$

5. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + 2xyz'_v$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = x^2 z'_v$. Vidare,

$$\begin{aligned}
z''_{xx} &= (z'_x)'_x = (z'_u)'_x + 2yz'_v + 2xy(z'_v)'_x = z''_{uu} + 4xyz''_{uv} + 4x^2y^2z''_{vv} + 2yz'_v, \\
z''_{xy} &= (z'_y)'_x = 2xz'_v + x^2(z'_v)'_x = x^2z''_{uv} + 2x^3yz''_{vv} + 2xz'_v, \\
z''_{yy} &= (z'_y)'_y = x^2(z'_v)'_y = x^4z''_{vv},
\end{aligned}$$

som insatt i differentialekvationen ger $x^2z''_{uu} = 6x^3 + 2x^4y$, alltså $z''_{uu} = 6u + 2v$. Integration ger först $z'_u = 3u^2 + 2uv + g(v)$ och sedan

$$z = u^3 + u^2v + u\,g(v) + h(v) = x^3 + x^4y + x\,g(x^2y) + h(x^2y),$$

där g och h är $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel.

Det första bivillkoret ger $2y = z(1,y) = 1 + y + g(y) + h(y)$, alltså $g(t) + h(t) = t - 1$, och eftersom $z'_x = 3x^2 + 4x^3y + g(x^2y) + 2x^2y\,g'(x^2y) + 2xy\,h'(x^2y)$ ger det andra bivillkoret $0 = z'_x(1,y) = 3 + 4y + g(y) + 2y\,g'(y) + 2y\,h'(y) = 3 + 6y + g(y)$ eftersom $g'(t) + h'(t) = 1$; alltså blir $g(t) = -6t - 3$ och $h(t) = 7t + 2$, så $z = x^4y - 6x^3y + x^3 + 7x^2y - 3x + 2$.

Svar: $z(x,y) = x^4y - 6x^3y + x^3 + 7x^2y - 3x + 2$.

6. Beteckna funktionen med $f(x,y)$.

   (a) $f'_x(0,0) = 1 \neq 0$, så origo är inte en stationär punkt för f och kan därför inte vara en lokal extrempunkt för f eftersom $f \in \mathcal{C}^1$. Svar: Ingetdera.

   (b) $f(x,y) = x^3 + (x-2y)^2$, så $f(2t,t) - f(0,0) = 8t^3$ som uppvisar teckenväxlingen $-0+$ då t växer förbi 0, så origo är ingen lokal extrempunkt för f. Svar: Ingetdera.

   (c) $f(x,y) - f(0,0) = x^4 + (x-2y)^2 \geq 0$ för alla (x,y), så origo är en lokal (t.o.m. global) minimipunkt för f. Svar: Lokalt minimum.

7. Vi noterar att avbildningen är $\mathcal{C}^1$, och att den har funktionaldeterminanten

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 3 & -\sin y \\ 1/(1+x^2) & 1 \end{vmatrix} = 3 + \frac{\sin y}{1+x^2} \geq 2$$

för alla $(x,y) \in \mathbf{R}^2$; speciellt är determinanten $\neq 0$, så inversa funktionssatsen ger att avbildningen kring varje punkt (x,y) har en *lokal* $\mathcal{C}^1$-invers $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$.

För att undersöka om avbildningen har en *global* invers fixerar vi $(u,v) \in \mathbf{R}^2$; vi vill visa att ekvationssystemet $u = 3x + \cos y$, $v = y + \arctan x$ har högst en lösning (x,y) för detta (u,v). Om vi eliminerar y får vi sambandet $u = 3x + \cos(v - \arctan x) = g(x)$ där $g'(x) = 3 + (\sin(v - \arctan x))/(1+x^2) \geq 2 > 0$ för alla x, så g är strängt växande och $g(x) \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$; elementär envariabelanalys medför därför att det finns precis en lösning x till ekvationen $g(x) = u$, och sedan får man $y = v - \arctan x$, entydigt.

Svar: Global invers finns.