Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2013-08-22 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm de tangentplan till ytan $x^2 + y + z^3 = 12$ som är parallella med planet $6x - y - 3z = 0$.

2. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av $3 + x - x^2 - y^2$ då $2x^2 + y^2 \leq 1$ och $x \leq 0$.

3. Beräkna $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{2x}^2 \frac{dy}{1+y^4} \right) x^2 \, dx$.

4. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till
$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + z^2 + xy - xz + \frac{2}{3}y^3.$$

5. Låt $u = u(x,y), v = v(x,y)$ vara $\mathcal{C}^1$-funktioner med $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$. Uttryck motsvarande samband mellan u'_ρ, v'_φ respektive u'_φ, v'_ρ, där ρ, φ är planpolära koordinater.

6. Beräkna volymen av den kropp i $\mathbf{R}^3$ som ges av olikheterna
$$\begin{cases} x + y + z \leq 2, \\ x - y^2 + z \geq 0, \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0. \end{cases}$$

7. Undersök $\displaystyle\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3} \, dxdy$ där D ges av $x > 0$ och $y > 0$.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2013-08-22

1. Sätt $F(x,y,z) = x^2+y+z^3$; då är den givna ytan nivåytan $F(x,y,z) = 12$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a,b,c) på ytan är parallellt med planet $6x - y - 3z = 0$ precis då $\nabla F(a,b,c) \parallel (6,-1,-3)$ och $F(a,b,c) = 12$, d.v.s. precis då

$$(2a, 1, 3c^2) \parallel (6,-1,-3) \quad \text{och} \quad a^2 + b + c^3 = 12.$$

Det första villkoret ger $2a = -6$ och $3c^2 = 3$, d.v.s. $a = -3$ och $c = \pm 1$, som insatt i det andra ger $b = 3 \mp 1$, och därmed tangeringspunkterna $(-3,2,1)$ och $(-3,4,-1)$, med tangentplanen $6x - y - 3z = -23$ respektive $6x - y - 3z = -19$.

Svar: Planen är $6x - y - 3z = -23$ och $6x - y - 3z = -19$.

2. De två bivillkoren $g(x,y) = 2x^2 + y^2 \leq 1$ och $h(x,y) = x \leq 0$ bestämmer en sluten (fylld) halvellips – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y) = 3 + x - x^2 - y^2$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

Vi får $\nabla f = (1-2x, -2y)$, $\nabla g = (4x, 2y)$ och $\nabla h = (1,0)$. Kandidatjakt:

- Kandidater i ytan $g < 1$, $h < 0$ finns där $\nabla f = \mathbf{0}$, d.v.s. där $(x,y) = (1/2, 0)$, som dock ligger utanför mängden. Ingen kandidat här.
- Kandidater på ellipskurvan $g = 1$, $h < 0$ finns där $\nabla f \parallel \nabla g$, d.v.s. där

$$0 = \begin{vmatrix} 1-2x & -2y \\ 4x & 2y \end{vmatrix} = (1+2x)2y,$$

alltså där $x = -1/2$ eller $y = 0$. Insättning av $x = -1/2$ i $g = 1$ ger $y = \pm 1/\sqrt{2}$, som efter kontroll mot $h < 0$ ger kandidaterna $f(-1/2, 1/\sqrt{2}) = f(-1/2, -1/\sqrt{2}) = 7/4$. Insättning av $y = 0$ i $g = 1$ ger efter kontroll mot $h < 0$ kandidaten $f(-1/\sqrt{2}, 0) = (5-\sqrt{2})/2$.
- Kandidater på sträckan $h = 0$, $g < 1$ finns där $\nabla f \parallel \nabla h$, d.v.s. där $y = 0$, som med $h = 0$ och efter kontroll mot $g < 1$ ger kandidaten $f(0,0) = 3$.
- Hörnpunkterna $g = 1$, $h = 0$ ger kandidaterna $f(0,1) = f(0,-1) = 2$.

Notera slutligen att $(5-\sqrt{2})/2 > (5-3/2)/2 = 7/4$.

Svar: $f_{\max} = f(0,0) = 3$, $f_{\min} = f(-1/2, 1/\sqrt{2}) = f(-1/2, -1/\sqrt{2}) = 7/4$.

3. Integrationsområdet $0 \leq x \leq 1$, $2x \leq y \leq 2$ kan skrivas $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq x \leq y/2$, så

$$\int_0^1 \left(\int_{2x}^2 \frac{dy}{1+y^4} \right) x^2\,dx = \int_0^2 \left(\int_0^{y/2} x^2\,dx \right) \frac{dy}{1+y^4}$$
$$= \frac{1}{24} \int_0^2 \frac{y^3\,dy}{1+y^4} = \frac{1}{24} \left[\frac{\ln(1+y^4)}{4} \right]_0^2 = \frac{\ln 17}{96}.$$

4. Stationära punkter för f fås ur ekvationssystemet $f'_x = x + y - z = 0$, $f'_y = x + 2y^2 = 0$, $f'_z = 2z - x = 0$. Den tredje ekvationen ger genast $x = 2z$, och den första ger sedan $y = -z$ varpå den andra ger $2z + 2z^2 = 0$, alltså $z = 0$ eller $z = -1$. Vi får således två stationära punkter: $(0,0,0)$ och $(-2,1,-1)$.

Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 1$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{xz} = -1$, $f''_{yy} = 4y$, $f''_{yz} = 0$, $f''_{zz} = 2$.

I punkten $(0,0,0)$ är $f''_{yy} = 0$, så vi får den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$$
$$= h^2 + 2hk - 2hl + 2l^2 = (h+k-l)^2 + (l+k)^2 - 2k^2,$$

som är indefinit: exempelvis är $Q(1,0,0) = 1 > 0$ medan $Q(2,-1,1) = -2 < 0$.

I punkten $(-2,1,-1)$ blir i stället $f''_{yy} = 4$ och $Q(h,k,l) = h^2 + 2hk - 2hl + 4k^2 + 2l^2 = (h+k-l)^2 + (l+k)^2 + 2k^2$, som är positivt definit: $Q(h,k,l) \geq 0$ för alla (h,k,l), och $Q(h,k,l) = 0$ endast om $h+k-l = 0$, $l+k = 0$ och $k = 0$, d.v.s. endast om $(h,k,l) = (0,0,0)$. Alltså är punkten $(x,y,z) = (-2,1,-1)$ en lokal minimipunkt för f.

Svar: $(-2,1,-1)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

5. Planpolära koordinater $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ ger med kedjeregeln de allmänna sambanden $w'_\rho = w'_x\cos\varphi + w'_y\sin\varphi$ och $w'_\varphi = -w'_x\rho\sin\varphi + w'_y\rho\cos\varphi$, så om $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$ får vi

$$v'_\varphi = -v'_x\rho\sin\varphi + v'_y\rho\cos\varphi = u'_y\rho\sin\varphi + u'_x\rho\cos\varphi = \rho(u'_x\cos\varphi + u'_y\sin\varphi) = \rho u'_\rho$$

och

$$u'_\varphi = -u'_x\rho\sin\varphi + u'_y\rho\cos\varphi = -v'_y\rho\sin\varphi - v'_x\rho\cos\varphi = -\rho(v'_x\cos\varphi + v'_y\sin\varphi) = -\rho v'_\rho.$$

Svar: $u'_\rho = v'_\varphi/\rho$ och $u'_\varphi = -\rho v'_\rho$.

6. För fixt $y \geq 0$ får vi tvärsnittet D_y, som kan skrivas $y^2 \leq x+z \leq 2-y$, $x \geq 0$, $z \geq 0$, och som är icketomt precis då $0 \leq y \leq 1$. För dessa y är D_y en halv kvadrat med sidlängd $2-y$ men med en halv kvadrat med sidlängd y^2 borttagen, så kroppens volym V blir

$$V = \int_0^1 \text{area}(D_y)\,dy = \int_0^1 \frac{(2-y)^2 - (y^2)^2}{2}\,dy = \left[-\frac{(2-y)^3}{6} - \frac{y^5}{10}\right]_0^1 = \frac{16}{15}.$$

7. Integralen är generaliserad och integranden $f(x,y) = (x-y)/(x+y)^3$ växlar tecken på D. Enligt definitionen på generaliserad dubbelintegral är därför $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ konvergent om och endast om $\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$ är konvergent. Eftersom $|f(x,y)| \geq 0$ får vi använda upprepad integration på $\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$, och vi får, tack vare symmetri i integrand och område,

$$\iint_D |f(x,y)|\,dxdy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{|x-y|\,dy}{(x+y)^3}\right) dx = 2\int_0^\infty \left(\int_0^x \frac{(x-y)\,dy}{(x+y)^3}\right) dx$$
$$= 2\int_0^\infty \left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^\infty \frac{dx}{2x},$$

som är divergent ($= +\infty$); alltså är $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ divergent.

Svar: Integralen är divergent.