Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2013-01-10 kl 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Beräkna
$$\iint_D (y-x)\,dxdy,$$
där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(4,1)$ och $(2,2)$.

2. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av funktionen xy på den del av ellipskurvan $x^2+xy+4y^2=6$ där $x \geq y$.

3. Beräkna
$$\iiint_D x\,dxdydz,$$
där D ges av $4x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ och $z \geq 0$.

4. Visa att ekvationen
$$3y^2-3yz+2x^3+z^3=19$$
i en omgivning till punkten $(x,y,z)=(1,2,-1)$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $z=z(x,y)$. Beräkna $z(1,2)$, $z'_x(1,2)$ och $z'_y(1,2)$, samt bestäm tangentplanet till funktionsytan i punkten $(1,2,-1)$.

5. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till
$$f(x,y,z)=y^2+z^2+2x^3-x^2y.$$

6. Kroppen K ges av $x^2+y^2+z^2 \leq 8$ och $2z \geq x^2+y^2$. Bestäm tyngdpunkens z-koordinat
$$z_T=\frac{\iiint_K z\,dxdydz}{\iiint_K dxdydz}.$$

7. Funktionen f tillhör $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$ och uppfyller differentialekvationen
$$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=pf(x,y),$$
där p är ett positivt heltal. Visa att $f(tx,ty)=t^p f(x,y)$ för alla $t>0$.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2013-01-10

1. Enklast är antagligen att göra det linjära variabelbytet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} v,$$

med funktionaldeterminanten $4 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 6$. Triangeln D motsvaras då i (u, v)-planet av triangeln E med hörn i $(u, v) = (0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$. Integralen blir

$$\begin{aligned} \iint_D (y - x)\, dxdy &= \iint_E \big((u + 2v) - (4u + 2v)\big) \cdot 6\, dudv \\ &= 6 \iint_E (-3u)\, dudv = -18 \int_{u=0}^{1} \left(\int_{v=0}^{1-u} u\, dv \right) du \\ &= -18 \int_{u=0}^{1} (u - u^2)\, du = -18 \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} \right) = -3. \end{aligned}$$

Svar: -3.

2. De två bivillkoren $g(x, y) = x^2 + xy + 4y^2 = 6$ och $h(x, y) = x - y \geq 0$ bestämmer en sluten delmängd av en ellipskurva – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x, y) = xy$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd. Kandidatjakt:

- Ellipskurvan ($g = 6$, $h > 0$):

$$\nabla f \parallel \nabla g \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x + y & x + 8y \end{vmatrix} = 8y^2 - 2x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm 2y.$$

Fallet $x = 2y$ insatt i $g = 6$ ger $10y^2 = 6$ och kandidaten $f(2\sqrt{3/5}, \sqrt{3/5}) = 6/5$ (den andra punkten man får, $(-2\sqrt{3/5}, -\sqrt{3/5})$, uppfyller ej kravet $h > 0$). Fallet $x = -2y$ ger analogt $6y^2 = 6$ och kandidaten $f(2, -1) = -2$ (den andra punkten man får, $(-2, 1)$, uppfyller ej kravet $h > 0$).

- Ändpunkterna ($g = 6$, $h = 0$): Ekvationssystemet $g = 6$, $h = 0$ ger genast $6x^2 = 6$ och $y = x$, alltså kandidaterna $f(1, 1) = 1$ och $f(-1, -1) = 1$.

Svar: $f_{\max} = f(2\sqrt{3/5}, \sqrt{3/5}) = 6/5$, $f_{\min} = f(2, -1) = -2$.

3. Bytet $(u, v, w) = (2x, y, z)$ ger ett nytt område E som definieras av $u^2 + v^2 + w^2 \leq 4$, $u \geq 0$, $v \geq 0$, $w \geq 0$, alltså ett åttondels klot. Efter byte till rymdpolära koordinater i (u, v, w)-rummet fås sedan området F som ges av $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Alltså:

$$\begin{aligned} \iiint_D x\, dxdydz &= \iiint_E \tfrac{1}{2} u \cdot \tfrac{1}{2}\, dudvdw = \frac{1}{4} \iiint_F (r \cos\phi \sin\theta)\, r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 r^3\, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\, d\phi = \frac{1}{4} \cdot \frac{2^4}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(Man kan även utnyttja att $\iiint_E u\, dudvdw = \iiint_E w\, dudvdw$ av symmetriskäl, så får man istället den aningen enklare integralen $\frac{1}{4} \iiint_F (r \cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi$ i sista steget.)

Svar: $\pi/4$.

4. Låt $f(x,y,z) = 3y^2 - 3yz + 2x^3 + z^3$. Eftersom $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$, $f(1,2,-1) = 19$ och $f'_z(1,2,-1) = -3\cdot 2 + 3(-1)^2 \neq 0$, så definierar ekvationen $f(x,y,z) = 19$ enligt implicita funktionssatsen en $\mathcal{C}^1$-funktion $z = z(x,y)$ i en omgivning av $(1,2,-1)$. Per definition är $z(1,2) = -1$, och eftersom $f(x,y,z(x,y)) = 19$ för alla (x,y) i en omgivning av $(1,2)$ så är (i denna omgivning) $\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(x,y,z(x,y)\Big) = 0$, dvs

$$f'_x(x,y,z(x,y)) + f'_z((x,y,z(x,y)))z'_x(x,y) = 0,$$

så att

$$z'_x(1,2) = -\frac{f'_x(1,2,-1)}{f'_z(1,2,-1)} = -\frac{6}{-3} = 2,$$

och på liknande sätt

$$z'_y(1,2) = -\frac{f'_y(1,2,-1)}{f'_z(1,2,-1)} = -\frac{15}{-3} = 5.$$

Tangentplanets ekvation är därmed $z = -1 + 2(x-1) + 5(y-2)$, dvs $2x + 5y - z = 13$. (Alternativt sätt att ta fram tangentplanets ekvation: använd direkt att normalvektorn $\nabla f(1,2,-1) = (6,15,-3) = 3(2,5,-1)$ ger koefficienterna för x, y och z.)

Svar: Se ovan.

5. Stationära punkter ges av $\nabla f(x,y,z) = (6x^2 - 2xy, 2y - x^2, 2z) = (0,0,0)$, dvs $(x,y,z) = (0,0,0)$ eller $(6,18,0)$. Den kvadratiska formen i origo är $Q(h,k,l) = 2(k^2 + l^2)$, vilket inte säger oss något (eftersom Q är positiv semidefinit); däremot antar ju $f(x,0,0) = 2x^3$ såväl positiva som negativa värden godtyckligt nära $x = 0$, vilket direkt visar att origo inte är någon lokal extrempunkt.

   Den kvadratiska formen i $(6,18,0)$ är $Q(h,k,l) = 36h^2 + 2k^2 + 2l^2 - 24hk = 2l^2 + 2(k-6h)^2 - 36h^2$. Teckenväxlingen $++-$ visar att Q är indefinit, t.ex. är ju $Q(1,6,0) = 0 + 0 - 36 < 0$ och $Q(0,0,1) = 2 + 0 + 0 > 0$. Inte heller denna punkt är alltså någon lokal extrempunkt.

   Svar: Funktionen saknar lokala extrempunkter.

6. I cylinderkoordinater (ρ,ϕ,z) beskrivs kroppen K av $\rho^2 + z^2 \leq 8$ och $z \geq \frac{1}{2}\rho^2$. Eftersom ϕ inte förekommer här så är kroppen rotationssymmetrisk kring z-axeln, och man kan lätt göra sig en bild av K genom att tänka sig den mängd i (ρ,z)-planet som avgränsas av cirkeln $\rho^2 + z^2 = 8$ och parabeln $z = \frac{1}{2}\rho^2$, och rotera denna mängd kring z-axeln. Notera att cirkeln och parabeln skär varandra i punkten $\rho = z = 2$, vilket man behöver veta när man ska ställa upp gränserna för integralerna.

   Om vi delar upp kroppen i cirkulära skivor D_z parallella med (x,y)-planet så får vi

$$\iiint_K z\,dxdydz = \int_{z=0}^{\sqrt{8}} z\,\mathrm{area}(D_z)\,dz = \int_0^2 z\cdot 2z\pi\,dz + \int_2^{\sqrt{8}} z\cdot(8-z^2)\pi\,dz,$$

   och motsvarande för $\iiint_K dxdydz$.

   Om vi istället räknar med stavar parallella med z-axeln så får vi

$$\iiint_K z\,dxdydz = \iint_{x^2+y^2\leq 2^2}\left(\int_{z=(x^2+y^2)/2}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z\,dz\right)dxdy,$$

   och motsvarande för $\iiint_K dxdydz$.

I båda fallen erhålls

$$z_T = \frac{28\pi/3}{(32\sqrt{2} - 28)\pi/3} = \frac{7}{8\sqrt{2} - 7} \ (\approx 1{,}62).$$

Svar: $\dfrac{7}{8\sqrt{2} - 7}$.

7. Fixera $(x, y) \neq (0, 0)$, och sätt $g(t) = f(tx, ty)$ för $t > 0$. Kedjeregeln ger

$$g'(t) = x\, f'_x(tx, ty) + y\, f'_y(tx, ty) = \frac{tx\, f'_x(tx, ty) + ty\, f'_y(tx, ty)}{t} \overset{*}{=} \frac{p\, f(tx, ty)}{t} = \frac{p}{t}\, g(t),$$

den stjärnmarkerade likheten enligt förutsättningen i uppgiften. Denna differentialekvation för g har den integrerande faktorn $\exp(\int \frac{-p}{t}\, dt) = t^{-p}$:

$$\begin{aligned}
g'(t) - \frac{p}{t}\, g(t) = 0 \qquad &\iff \qquad \Big(g'(t) - \frac{p}{t}\, g(t)\Big)\, t^{-p} = 0 \\
&\iff \qquad t^{-p} g'(t) + (-p\, t^{-p-1})\, g(t) = 0 \\
&\iff \qquad \frac{d}{dt}\big(t^{-p} g(t)\big) = 0 \\
&\iff \qquad t^{-p} g(t) = C,
\end{aligned}$$

där konstanten C kan bero på x och y; mer precist så visar ju insättning av $t = 1$ att $C = g(1) = f(x, y)$. Slutsats: $g(t) = f(x, y)\, t^p$, vilket var just vad som skulle visas.