

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2012-10-22 kl 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).

8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.

Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy + y^3.$$

2. Beräkna

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2)^2},$$

där D ges av $0 \leq y \leq x$.

3. Bestäm alla punkter P på ytan $x^2 + y^2 + z^2 + x - y + 4z = 36$ sådana att ytans normallinje i P går genom origo.

4. Beräkna

$$\iiint_D yz \, dxdydz,$$

där D ges av $9x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 4$, $2y \geq 3x \geq 0$ och $z \leq 0$.

5. (a) Definiera vad som menas med att en funktion $f(x, y)$ är partiellt deriverbar med avseende på x i punkten (a, b) .

(b) Beräkna $g'_x(0, 0)$ då $g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{då } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{då } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(c) Undersök om g'_x är kontinuerlig i $(0, 0)$.

6. Bestäm alla C^2 -lösningar $z(x, y)$ till differentialekvationen

$$yz''_{yy} - xz''_{xy} + z'_y = x, \quad x > 0,$$

under bivillkoren $z(1, y) = y^2 + 1$, $z(x, 0) = x$, t.ex. genom att göra variabelbytet $u = x$, $v = xy$.

7. Skriv talet 4 som en produkt av fyra positiva faktorer så att summan av faktorernas inverterade värden blir så liten som möjligt. Bestäm också detta minsta värde. Motivera noggrant.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2012-10-22

1. De stationära punkterna fås ur $f'_x = 2x + 4y = 0$ och $f'_y = 2y + 4x + 3y^2 = 0$. Den första ekvationen ger genast $x = -2y$, som insatt i den andra ger $3y^2 - 6y = 0$, d.v.s. $y = 0$ eller $y = 2$, och vi får därmed två stationära punkter: $(0, 0)$ och $(-4, 2)$.

Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = 2 + 6y$.

I $(0, 0)$ blir $f''_{yy} = 2$, och den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= 2h^2 + 8hk + 2k^2 = 2(h + 2k)^2 - 6k^2, \end{aligned}$$

som är indefinit eftersom t.ex. $Q(1, 0) = 2 > 0$ medan $Q(2, -1) = -6 < 0$, så punkten $(0, 0)$ är ingen lokal extrempunkt för f .

I $(-4, 2)$ blir $f''_{yy} = 14$, och vi får den kvadratiska formen

$$Q(h, k) = 2h^2 + 8hk + 14k^2 = 2(h + 2k)^2 + 6k^2,$$

som är positivt definit eftersom $Q(h, k) \geq 0$ för alla (h, k) och $Q(h, k) = 0$ endast om $h + 2k = 0$ och $k = 0$, d.v.s. endast om $(h, k) = (0, 0)$. Således är punkten $(-4, 2)$ en lokal minimipunkt för f .

Svar: $(-4, 2)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

2. Integralen är generaliserad men integranden är positiv, så variabelbyte och upprepad integration får användas. Vi får

$$\iint_D \frac{dx dy}{(1+x^2)^2} = \int_0^\infty \left(\int_0^x dy \right) \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^\infty \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = \left[-\frac{1}{2(1+x^2)} \right]_0^\infty = \frac{1}{2}.$$

3. Ytan kan skrivas som nivåytan $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x - y + 4z = 36$. Normallinjen till ytan i en punkt (a, b, c) på ytan har riktningsvektor $\nabla F(a, b, c) = (2a+1, 2b-1, 2c+4)$, och normallinjen går genom origo precis då $\nabla F(a, b, c) \parallel (a-0, b-0, c-0)$ och $F(a, b, c) = 36$, d.v.s. precis då $\mathbf{0} = (2a+1, 2b-1, 2c+4) \times (a, b, c) = (-4b-c, 4a-c, a+b)$ och $a^2 + b^2 + c^2 + a - b + 4c = 36$. Det första villkoret ger $b = -a$ och $c = 4a$, som insatt i det andra ger $18a^2 + 18a = 36$, d.v.s. $a = 1$ eller $a = -2$. Vi får således punkterna $(1, -1, 4)$ och $(-2, 2, -8)$.

Svar: $(1, -1, 4)$ och $(-2, 2, -8)$.

4. Linjärt byte $u = 3x$, $v = 2y$, $w = z$ med funktionaldeterminant $|d(u, v, w)/d(x, y, z)| = 6$ så att $dx dy dz = dudvdw/6$ och nytt område $E : u^2 + v^2 + w^2 \leq 4$, $v \geq u \geq 0$, $w \leq 0$, följt av rymdpolärt byte $u = r \sin \theta \cos \varphi$, $v = r \sin \theta \sin \varphi$, $w = r \cos \theta$, med $dudvdw = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ och gränser $F : 0 \leq r \leq 2$, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$, ger

$$\begin{aligned} \iiint_D yz dx dy dz &= \iiint_E \frac{vw}{2} \frac{dudvdw}{6} = \frac{1}{12} \int_0^2 r^4 dr \cdot \int_{\pi/2}^\pi \sin^2 \theta \cos \theta d\theta \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{12} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^2 \left[\frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{\pi/2}^\pi [-\cos \varphi]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{12} \cdot \frac{32}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{45}. \end{aligned}$$

5. (a) f är partiellt deriverbar m.a.p. x i (a, b) om $f'_x(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$ existerar.

(b) $g'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h, 0) - g(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3/(h^2 + 0^2) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$ Svar: 1.

(c) Eftersom $g(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ då $(x, y) \neq (0, 0)$ ger derivering $g'_x(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ då $(x, y) \neq (0, 0)$, och eftersom $g'_x(0, y) = 0 \rightarrow 0 \neq 1 = g'_x(0, 0)$ då $y \rightarrow 0$ ser vi att g'_x inte är kontinuerlig i $(0, 0)$. Svar: g'_x är inte kontinuerlig i $(0, 0)$.

6. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + yz'_v$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = xz'_v$. Vidare, $z''_{yy} = (z'_y)'_y = (xz'_v)'_y = x(z'_v)'_y = x^2 z''_{vv}$ och $z''_{xy} = (z'_y)'_x = (xz'_v)'_x = z'_v + x(z'_v)'_x = z'_v + x(z''_{uv} + yz''_{vv})$. Insättning i differentialekvationen ger $-x^2 z''_{uv} = x$, och eftersom $x > 0$ får vi $z''_{uv} = -1/x = -1/u$. Integration ger först $z'_u = -v/u + g(u)$ och sedan $z = -v \ln u + G(u) + H(v) = -xy \ln x + G(x) + H(x)$, där G och H är \mathcal{C}^2 -funktioner av en variabel.

Bivillkoren ger nu $y^2 + 1 = z(1, y) = G(1) + H(y)$ för $y \in \mathbf{R}$ och $x = z(x, 0) = G(x) + H(0)$ för $x > 0$, så $H(t) = t^2 + 1 - G(1)$ för $t \in \mathbf{R}$ och $G(t) = t - H(0)$ för $t > 0$, så $z(x, y) = -xy \ln x + x - H(0) + (xy)^2 + 1 - G(1) = -xy \ln x + x + (xy)^2$, eftersom $G(1) + H(0) = 1$.

Svar: $z(x, y) = -xy \ln x + x + (xy)^2$.

7. Låt de positiva faktorerna vara x, y, z och t . Det gäller då att minimera $f(x, y, z, t) = 1/x + 1/y + 1/z + 1/t$ under bivillkoren $g(x, y, z, t) = xyzt = 4$ samt $x > 0, y > 0, z > 0$ och $t > 0$. Denna mängd, kalla den H (som i hyperyta), är *inte* kompakt, så vi kan inte i förväg vara säkra på att minimum verkligen existerar.

Om minimum existerar, så antas det i en punkt (a, b, c, d) där $\nabla f(a, b, c, d) \parallel \nabla g(a, b, c, d)$ och $g(a, b, c, d) = 4$, d.v.s. där $(-1/a^2, -1/b^2, -1/c^2, -1/d^2) \parallel (bcd, acd, abd, bcd)$ och $abcd = 4$. Detta ger $a = b = c = d$, och insättning i $abcd = 4$ ger $a^4 = 4$ och därför, eftersom alla variabler är positiva, $a = \sqrt{2}$ och $f_{\min} = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, återigen om minimum existerar.

Vi måste också visa att minimum existerar. Antag att $(x, y, z, t) \in H$. Om $x \geq M > 0$ så är $0 < yzt \leq 4/M$, så minst en av de tre faktorerna y, z och t måste vara $\leq \sqrt[3]{4/M}$ (annars blir ju $yzt > 4/M$), och därmed är $f > \sqrt[3]{M/4} > 2\sqrt{2}$ om M är stort nog. Samma sak gäller naturligtvis för övriga faktorer y, z och t . Välj M så stort i fortsättningen. Då blir $f > 2\sqrt{2}$ på den del av H som inte ligger inuti den slutna kuben $K_M: 0 \leq x, y, z, t \leq M$. På resterande del av H , alltså på $H_M = H \cap K_M$, som är en kompakt mängd där f är kontinuerlig, antar f ett minsta värde m där $m \leq f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, och m är därmed ett globalt minsta värde på hela H .

Nu vet vi alltså att minimum verkligen existerar, och enligt andra stycket ovan måste det därför antas i punkten $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ och där är $f = 2\sqrt{2}$.

Svar: $4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ ger minsta summan $2\sqrt{2}$ av faktorernas inverterade värden.