Linköpings universitet
Matematiska institutionen

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA43 Flervariabelanalys

2012-08-16 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5. Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till
$$f(x,y) = 4xy - 2y^2 - x^4.$$

2. Bestäm de tangentplan till ytan $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy = 24$ som är parallella med planet $x + 3y + z = 0$.

3. Beräkna volymen av den kropp i $\mathbf{R}^3$ som begränsas av ytorna
$$z = x^2 + 2y^2 \quad \text{och} \quad 2x + z = 2.$$

4. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av $x + 2y + 2z$ då $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x \leq 0$.

5. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-lösningar $u(x,y,z)$ respektive $u(x,y)$ till följande differentialekvationssystem:

(a) $$\begin{cases} u'_x = 1 + y\cos xy \\ u'_y = ze^{yz} + x\cos xy \\ u'_z = 1 + ye^{yz} \end{cases} \quad \text{med bivillkoret } u(0,0,0) = 0.$$

(b) $$\begin{cases} u'_x = e^{x^2}(1 + y^2) \\ u'_y = \dfrac{y}{x}e^{x^2} \end{cases}, \ x > 0, \text{ med bivillkoret } u(1,0) = 0.$$

6. Beräkna
$$\iiint_D y\, e^{-(x^2+3y^2+4z^2)^2}\, dxdydz,$$
där D ges av $y \geq |x|$ och $z \geq 0$.

7. Betrakta funktionen $f(x,y) = x^2 - 2y$ och kurvan $x^2 + y^2 = 1$, $z = f(x,y)$.
   (a) Var på kurvan är kurvans lutning som störst? Hur brant är det där?
   (b) Var på kurvan och i vilken riktning där är funktionsytan $z = f(x,y)$ som brantast? Hur brant är det där?

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2012-08-16

1. De stationära punkterna fås ur $f'_x = 4y - 4x^3 = 0$ och $f'_y = 4x - 4y = 0$. Den andra ekvationen ger genast $y = x$, som insatt i den första ger $4x - 4x^3 = 0$, d.v.s. $x = 0$ eller $x = \pm 1$, och vi får därmed totalt tre stationära punkter: $(0,0)$, $(1,1)$ och $(-1,-1)$. Andraderivatorna blir $f''_{xx} = -12x^2$, $f''_{xy} = 4$ och $f''_{yy} = -4$.

   I $(0,0)$ blir $f''_{xx} = 0$ och den kvadratiska formen

$$
\begin{aligned}
Q(h,k) &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\
&= 8hk - 4k^2 = -4(k-h)^2 + 4h^2,
\end{aligned}
$$

   som är indefinit eftersom t.ex. $Q(1,1) = 4 > 0$ medan $Q(0,1) = -4 < 0$, så punkten $(0,0)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

   I $(1,1)$ och $(-1,-1)$ blir $f''_{xx} = -12$, och vi får i båda punkterna den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = -12h^2 + 8hk - 4k^2 = -4(k-h)^2 - 8h^2,$$

   som är negativt definit eftersom $Q(h,k) \leq 0$ för alla (h,k) och $Q(h,k) = 0$ endast om $k - h = 0$ och $h = 0$, d.v.s. endast om $(h,k) = (0,0)$. Således är punkterna $(1,1)$ och $(-1,-1)$ lokala maximipunkter för f.

   Svar: $(1,1)$ och $(-1,-1)$ är lokala maximipunkter. Lokala minimipunkter saknas.

2. Sätt $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy$; då är den givna ytan nivåytan $F(x,y,z) = 24$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a,b,c) på ytan är parallellt med det givna planet, $x + 3y + z = 0$, precis då $\nabla F(a,b,c) \parallel (1,3,1)$ och $F(a,b,c) = 24$, d.v.s. precis då $(2a + 2b, 2a + 4b, 2c) \parallel (1,3,1)$ och $a^2 + 2b^2 + c^2 + 2ab = 24$. Det första villkoret ger $6a + 6b = 2a + 4b = 6c$, d.v.s. $b = -2a$ och $c = -a$, som insatt i det andra ger $6a^2 = 24$, d.v.s. $a = \pm 2$, och därmed tangeringspunkterna $(2,-4,-2)$ och $(-2,4,2)$, med tangentplanen $x + 3y + z = -12$ respektive $x + 3y + z = 12$.

   Svar: Planen är $x + 3y + z = 12$ och $x + 3y + z = -12$.

3. Ytorna skär varandra längs kurvan $x^2 + 2y^2 = 2 - 2x$, $z = 2 - 2x$, vars projektion på xy-planet är ellipsen $(x+1)^2 + 2y^2 = 3$. Den givna kroppen D har projektionen $\tilde{D}$ i xy-planet som ges av $(x+1)^2 + 2y^2 \leq 3$, så med stavar i z-led får vi, med linjärt byte $u = x + 1$, $v = \sqrt{2}\,y$ och ny mängd $E : u^2 + v^2 \leq 3$ och $dudv = \sqrt{2}\,dxdy$, följt av planpolärt byte $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$ med ny mängd $F : 0 \leq \rho \leq \sqrt{3},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $dudv = \rho\, d\rho d\varphi$,

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_{\tilde{D}} \big((2-2x) - (x^2 + 2y^2)\big)\, dxdy = \iint_E (3 - u^2 - v^2)\, \frac{dudv}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{2\pi} (3 - \rho^2)\rho\, d\varphi \right) d\rho = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{(3-\rho^2)^2}{2\cdot(-2)} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{9\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

4. De två bivillkoren $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $h(x,y,z) = x \leq 0$ bestämmer en sluten halvsfär – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y,z) = x + 2y + 2z$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (1,2,2)$, $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ och $\nabla h = (1,0,0)$. Kandidatjakt:

- Kandidater på halvsfären $g = 1$, $h < 0$ finns där $\nabla f \parallel \nabla g$, d.v.s. där $\nabla f \times \nabla g = \mathbf{0}$, alltså där $2x = y = z$. Insättning i $g = 1$ ger $9x^2 = 1$, således $x = \pm 1/3$, som efter kontroll mot $h < 0$ ger kandidaten $f(-1/3, -2/3, -2/3) = -3$.
- Kandidater på cirkeln $g = 1$, $h = 0$ finns där $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ är linjärt beroende, d.v.s. där
$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4(z - y),$$
d.v.s. där $z = y$. Insättning i $g = 1$ och $h = 0$ ger $x = 0$ och $2y^2 = 1$ och därmed kandidaterna $f(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ och $f(0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$.

<u>Svar</u>: $f_{\max} = f(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ och $f_{\min} = f(-1/3, -2/3, -2/3) = -3$.

5. (a) Integration av ekvation 1 m.a.p. x ger $u = x + \sin xy + g(y, z)$, som deriverat m.a.p. y och insatt i ekvation 2 ger $g'_y(y, z) = ze^{yz}$, d.v.s. $g(y, z) = e^{yz} + h(z)$. Derivering av u m.a.p. z och insättning i ekvation 3 ger nu $h'(z) = 1$, d.v.s. $h(z) = z + C$. Villkoret $u(0, 0, 0) = 0$ ger slutligen $C = -1$. <u>Svar</u>: $u(x, y, z) = x + \sin xy + e^{yz} + z - 1$.

   (b) Integration av ekvation 2 m.a.p. y ger $u = y^2 e^{x^2}/2x + g(x)$, som deriverat m.a.p. x och insatt i ekvation 1 ger $g'(x) = e^{x^2}(1 + y^2/2x^2)$, vilket är en motsägelse eftersom högerledet i denna likhet även beror på y. <u>Svar</u>: Lösning saknas.

6. Integralen är generaliserad men integranden är positiv (eftersom $y \geq |x| \geq 0$ i D), så variabelbyte och upprepad integration får användas.

   Linjärt byte $u = x$, $v = \sqrt{3}\, y$, $w = 2z$ med $|d(u, v, w)/d(x, y, z)| = 2\sqrt{3}$ och nytt område $E : v \geq \sqrt{3}\,|u|$, $w \geq 0$, följt av rymdpolärt byte $u = r \sin\theta \cos\varphi$, $v = r \sin\theta \sin\varphi$, $w = r\cos\theta$, med gränser $F : 0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $\pi/3 \leq \varphi \leq 2\pi/3$, ger
$$\iiint_D y\, e^{-(x^2+3y^2+4z^2)^2}\, dxdydz = \iiint_E \frac{v}{\sqrt{3}}\, e^{-(u^2+v^2+w^2)^2}\, \frac{dudvdw}{2\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1}{6} \int_0^\infty r^3 e^{-r^4}\, dr \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\, d\theta \cdot \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin\varphi\, d\varphi$$
$$= \frac{1}{6} \left[\frac{e^{-r^4}}{-4}\right]_0^\infty \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} \left[-\cos\varphi\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{\pi}{96}.$$

7. Höjdfunktionen är $z = f(x, y)$. Lutningen i en viss punkt $(x, y, f(x, y))$ i en viss xy-riktning $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^2$ med $|\boldsymbol{v}| = 1$ bestäms av riktningsderivatan $f'_{\boldsymbol{v}}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \boldsymbol{v} = (2x, -2) \cdot \boldsymbol{v}$, och lutningsvinkeln är $\arctan f'_{\boldsymbol{v}}(x, y)$.

   (a) Här är $\boldsymbol{v} = (-y, x)$ när vi går runt kurvan moturs, och $f'_{\boldsymbol{v}}(x, y) = -2xy - 2x = A(x, y)$ skall optimeras under bivillkoret $x^2 + y^2 = 1$. Sedvanlig kompakt optimering ger kandidaterna $A(0, -1) = 0$ och $A(\pm\sqrt{3}/2, 1/2) = \mp 3\sqrt{3}/2$. Maximal lutningsvinkel – uppåt eller nedåt – är alltså $\arctan(3\sqrt{3}/2)$ i punkterna där $(x, y) = (\pm\sqrt{3}/2, 1/2)$.

   (b) Här kan $\boldsymbol{v}$ vara vilken enhetsvektor som helst när vi går runt kurvan, och för varje fixt (x, y) är $\max_{|\boldsymbol{v}|=1} |f'_{\boldsymbol{v}}(x, y)| = |\nabla f(x, y)| = 2\sqrt{x^2 + 1} = B(x, y)$, där maximum för detta fixa (x, y) antas precis då $\boldsymbol{v} \parallel \nabla f(x, y)$. Att sedan maximera $B(x, y)$ under bivillkoret $x^2 + y^2 = 1$ är trivialt: $B(\pm 1, 0) = 2\sqrt{2}$. Maximal lutningsvinkel – uppåt eller nedåt – är alltså $\arctan(2\sqrt{2})$ i punkterna där $(x, y) = (1, 0)$ eller $(-1, 0)$, och i xy-riktningarna $\boldsymbol{v} = \pm(1, -1)/\sqrt{2}$ respektive $\pm(1, 1)/\sqrt{2}$.