Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys TATA43

2012-05-29 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av $x - xy$ på den del av cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$ där $x \geq \frac{1}{2}$.

2. Beräkna
$$\iint_D \frac{x-y}{x+y}\,dxdy,$$
där D ges av $1 \leq x + y \leq 2x - y \leq 2$.

3. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till
$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - x^2 y.$$

4. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-lösningar $z(x, y)$ till differentialekvationen
$$x z''_{xx} - y z''_{xy} + z'_x = 2xy$$
för $x > 0$, $y > 0$ genom att till exempel göra variabelbytet $u = xy$, $v = y$.

5. Det homogena stympade klotet K ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och $z \geq \frac{1}{3}$. Beräkna tyngdpunktens z-koordinat
$$z_T = \frac{\iiint_K z\,dxdydz}{\iiint_K 1\,dxdydz}.$$

6. Betrakta ytan $xyz = 1$. Beskriv de punkter på ytan i vilka normallinjen till ytan
a) också går genom origo b) skär z-axeln.

7. Visa att ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + e^y + \ln z = e \\ e^x + \ln y + z = 2 \end{cases}$$
i en omgivning av punkten $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ definierar $\mathcal{C}^1$-funktioner $y(x)$, $z(x)$. Avgör dessutom för var och en av dessa funktioner huruvida de har lokalt extremvärde i $x = 0$.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2012-05-29

1. De två bivillkoren $g(x,y) = x^2 + y^2 \leq 1$ och $h(x,y) = x \geq 1/2$ bestämmer en sluten och begränsad mängd, och målfunktionen $f(x,y) = x - xy$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (1-y, -x)$, $\nabla g = (2x, 2y)$ och $\nabla h = (1,0)$. Kandidatjakt:

   - dim 2 (inre punkter, $g < 1$, $h > 1/2$): $\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow (x,y) = (0,1)$, som dock ligger utanför mängden. Ingen kandidat här.
   - dim 1, består av två delar:
     - (cirkelbiten $g = 1$, $h > 1/2$): $\nabla f \parallel \nabla g \;\Leftrightarrow\; 0 = \begin{vmatrix} 1-y & -x \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2(x^2 - y^2 + y)$, d.v.s. $x^2 = y^2 - y$, som insatt i $g = 1$ ger $y^2 - y/2 - 1/2 = 0$, d.v.s. $y = 1$ eller $y = -1/2$. Fallet $y = 1$ insatt i $g = 1$ ger $x = 0$, men $(0,1)$ ligger utanför, medan fallet $y = -1/2$ ger $x = \pm\sqrt{3}/2$, som efter kontroll mot $h > 1/2$ ger kandidaten $f(\sqrt{3}/2, -1/2) = 3\sqrt{3}/4$.
     - (sträckan $g < 1$, $h = 1/2$): $\nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow (1-y, -x) \parallel (1,0) \Leftrightarrow x = 0$, men då är $h = 0 \neq 1/2$. Ingen kandidat här.
   - dim 0 (hörn, $g = 1$, $h = 1/2$): Ekvationssystemet $g = 1$, $h = 1/2$ ger genast kandidaterna $f(1/2, \sqrt{3}/2) = (2 - \sqrt{3})/4$ och $f(1/2, -\sqrt{3}/2) = (2 + \sqrt{3})/4$.

   <u>Svar</u>: $f_{\max} = f(\sqrt{3}/2, -1/2) = 3\sqrt{3}/4$, $f_{\min} = f(1/2, \sqrt{3}/2) = (2 - \sqrt{3})/4$.

2. Linjärt byte $u = x + y$, $v = 2x - y$ ger $d(u,v)/d(x,y) = -3$, så $dxdy = dudv/3$, och det nya området ges av $1 \leq u \leq v \leq 2$. Eftersom $x - y = (2v - u)/3$ får vi därför

$$\iint_D \frac{x-y}{x+y}\,dxdy = \frac{1}{9}\int_1^2 \left(\int_u^2 \frac{2v-u}{u}\,dv\right) du = \frac{1}{9}\int_1^2 \left(\frac{4}{u} - 2\right) du = \frac{2}{9}(2\ln 2 - 1).$$

3. Stationära punkter för f fås ur ekvationssystemet $f'_x = 4x - 2xy = 0$, $f'_y = 2y - x^2 = 0$, $f'_z = 2z = 0$. Den tredje ekvationen ger genast $z = 0$, och insättning av $2y = x^2$ från den andra i den första ger $4x - x^3 = 0$, alltså $x = 0$ eller $x = \pm 2$. Vi får således totalt tre stationära punkter: $(0,0,0)$, $(2,2,0)$ och $(-2,2,0)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 4 - 2y$, $f''_{xy} = -2x$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yy} = 2$, $f''_{yz} = 0$, $f''_{zz} = 2$.

   I punkten $(0,0,0)$ är $f''_{xx} = 4$ och $f''_{xy} = 0$, så vi får den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = 4h^2 + 2k^2 + 2l^2,$$

   som är positivt definit: $Q(h,k,l) \geq 0$ för alla (h,k,l), och $Q(h,k,l) = 0$ endast om $(h,k,l) = (0,0,0)$. Alltså är punkten $(x,y,z) = (0,0,0)$ en lokal minimipunkt för f.

   I punkten $(2,2,0)$ blir i stället $f''_{xx} = 0$ och $f''_{xy} = -4$, och där blir $Q(h,k,l) = 2k^2 + 2l^2 - 8hk = 2\left((k-2h)^2 - 4h^2 + l^2\right)$, som är indefinit: exempelvis är $Q(0,1,0) = 2 > 0$ medan $Q(1,2,0) = -8 < 0$. Punkten $(x,y,z) = (2,2,0)$ är alltså ingen lokal extrempunkt för f.

   I punkten $(-2,2,0)$, slutligen, är $f''_{xx} = 0$ och $f''_{xy} = 4$, och där blir den kvadratiska formen $Q(h,k,l) = 2k^2 + 2l^2 + 8hk = 2\left((k+2h)^2 - 4h^2 + l^2\right)$, som också är indefinit.

   <u>Svar</u>: $(0,0,0)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

4. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = y z'_u$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = x z'_u + z'_v$. Vidare, $z''_{xx} = (z'_x)'_x = (y z'_u)'_x = y (z'_u)'_x = y^2 z''_{uu}$ och $z''_{xy} = (z'_x)'_y = (y z'_u)'_y = z'_u + y (z'_u)'_y = z'_u + y(x z''_{uu} + z''_{uv})$. Insättning i differentialekvationen ger $-y^2 z''_{uv} = 2xy$, och eftersom $x > 0$ och $y > 0$ får vi $z''_{uv} = -2x/y = -2u/v^2$. Integration ger först $z'_u = 2u/v + g(u)$ och sedan $z = u^2/v + G(u) + H(v) = x^2 y + G(xy) + H(y)$, där G och H är $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel. Svar: $z(x, y) = x^2 y + G(xy) + H(y)$.

5. Skivorna K_z på fixa z-nivåer är cirkelskivor med radie $\sqrt{1 - z^2}$, så

$$\iiint_K dxdydz = \int_{1/3}^{1} \left(\iint_{K_z} dxdy \right) dz = \int_{1/3}^{1} \operatorname{area}(K_z)\, dz = \int_{1/3}^{1} \pi(1 - z^2)\, dz = \frac{28}{81}\pi,$$

och, analogt,

$$\iiint_K z\, dxdydz = \int_{1/3}^{1} \pi(z - z^3)\, dz = \frac{16}{81}\pi,$$

så $z_T = (16\pi/81)/(28\pi/81) = 4/7$. Svar: $z_T = 4/7$.

6. Ytan kan skrivas som nivåytan $F(x, y, z) = xyz = 1$. En riktningsvektor för normallinjen till ytan i en punkt (a, b, c) på ytan ges av $\boldsymbol{v} = \nabla F(a, b, c) = (bc, ac, ab)$, och eftersom $abc = 1$ kan vi också skriva $\boldsymbol{v} = (1/a, 1/b, 1/c)$.

   (a) Normallinjen går genom origo precis då $(1/a, 1/b, 1/c) \parallel (a - 0, b - 0, c - 0)$ och $abc = 1$, d.v.s. precis då $a^2 = b^2 = c^2$ och $abc = 1$. Alltså är $b = \pm a$ och $c = \pm a$, och insättning i $abc = 1$ ger $a = \pm 1$ och totalt fyra punkter: $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ och $(-1, -1, 1)$.

   (b) Normallinjen skär z-axeln precis då dess projektion på xy-planet går genom $(0, 0)$, och detta sker precis då $(1/a, 1/b) \parallel (a - 0, b - 0)$ och $abc = 1$, alltså precis då $a^2 = b^2$ och $abc = 1$. Detta sker alltså längs de fyra kurvorna $(t, t, 1/t^2)$, $(t, -t, -1/t^2)$, $(-t, t, -1/t^2)$ och $(-t, -t, 1/t^2)$, alla för $t > 0$.

7. Sätt $F(x, y, z) = x + e^y + \ln z$ och $G(x, y, z) = e^x + \ln y + z$; då utgörs lösningarna till ekvationssystemet av skärningskurvan mellan nivåytorna $F = e$ och $G = 2$. Vi får

$$\nabla F \times \nabla G = \left(1, e^y, \frac{1}{z}\right) \times \left(e^x, \frac{1}{y}, 1\right) = \left(e^y - \frac{1}{yz}, \frac{e^x}{z} - 1, \frac{1}{y} - e^x e^y\right),$$

vars x-komponent i punkten $(0, 1, 1)$ är $e - 1 \neq 0$. Eftersom $F(0, 1, 1) = e$, $G(0, 1, 1) = 2$ och F och G är $\mathcal{C}^1$-funktioner, ger implicita funktionssatsen därför att ekvationssystemet $F = e$, $G = 2$ i någon omgivning till $(0, 1, 1)$ definierar $\mathcal{C}^1$-funktioner $y(x)$ och $z(x)$. Implicit derivering med avseende på x nära $x = 0$ ger sedan, i matrisform,

$$\begin{pmatrix} e^y & 1/z \\ 1/y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -e^x \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{e^y - 1/yz} \begin{pmatrix} 1 & -1/z \\ -1/y & e^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -e^x \end{pmatrix}.$$

Eftersom $y(0) = 1$ och $z(0) = 1$ får vi speciellt att $y'(0) = 0$ och $z'(0) = -1$, så $z(x)$ har inte lokalt extremvärde i $x = 0$ medan $y(x)$ eventuellt har det. Från uttrycket ovan ser vi att funktionerna $y(x)$ och $z(x)$ till och med är $\mathcal{C}^2$ eftersom högerledet där är $\mathcal{C}^1$, och vi kan därför derivera en gång till:

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x/z - 1}{e^y - 1/yz}\right) = \frac{e^x/z - e^x z'/z^2}{e^y - 1/yz} - \frac{(e^x/z - 1) \cdot \text{något}}{(e^y - 1/yz)^2} = \frac{2}{e - 1} > 0 \text{ då } x = 0,$$

så $y(x)$ har lokalt minimum i $x = 0$.