Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys TATA43

2012-01-12 kl 8-13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-lösningar $z(x,y)$ till differentialekvationen
$$xz'_x + yz'_y = 1 + x$$
för $x > 0$ och $y > 0$ under villkoret $z(1,y) = 1$ genom att till exempel göra variabelbytet $u = \dfrac{x}{y}$, $v = y$.

2. Beräkna
$$\iiint_D (x - z)\, dxdydz,$$
där D ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$, $y \geq 0$ och $z \leq 0$.

3. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av $2x + xy$ på den del av ellipsskivan $3x^2 + y^2 \leq 4$ där $3x + y \geq 0$.

4. Bestäm de tangentplan till ytan $x^2 + 3z^2 - xy - 3yz = 44$ som är parallella med planet $4y = 3(x + z)$.

5. Beräkna
$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-4xy-8y^2}\, dxdy.$$

6. Avgör om funktionen
$$f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + e^{z^2} + \ln(3 + yz)$$
har lokalt maximum eller lokalt minimum i punkten

   (a) $(0,0,0)$ (b) $(0,-1,2)$.

7. Visa att ekvationen
$$\sin(x^2 y) - y^3 = 1$$
i en omgivning av punkten $(0,-1)$ entydigt definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y = y(x)$. Avgör sedan om denna funktion har lokalt maximum eller lokalt minimum i punkten $x = 0$.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2012-01-12

1. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u/y$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = -xz'_u/y^2 + z'_v$, och insättning i differentialekvationen ger $yz'_v = 1 + x$ för $x > 0$, $y > 0$, d.v.s. $z'_v = 1/v + u$ för $u > 0$, $v > 0$, som integrerad ger $z = \ln v + uv + g(u) = \ln y + x + g(x/y)$, där g är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Bivillkoret ger nu $1 = z(1, y) = \ln y + 1 + g(1/y)$ då $y > 0$, så $g(t) = -\ln(1/t) = \ln t$ för $t > 0$, och därmed får vi till sist $z(x, y) = \ln y + x + \ln(x/y) = x + \ln x$ då $x > 0$ och $y > 0$. <u>Svar</u>: $z(x, y) = x + \ln x$.

2. Rymdpolärt byte $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, ger $dxdydz = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$ och nya gränser $E : 0 \le r \le \sqrt{3}$, $\pi/2 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le \pi$, varför

$$\begin{aligned}\iiint_D (x - z)\, dxdydz &= \iiint_E (r\sin\theta\cos\varphi - r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^{\pi} (\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta)\, d\varphi \right) \sin\theta\, d\theta \right) r^3\, dr \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{\pi/2}^{\pi} (-\pi\cos\theta\sin\theta)\, d\theta \right) r^3\, dr = \left[-\frac{\pi\sin^2\theta}{2} \right]_{\pi/2}^{\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{9\pi.}{8}.\end{aligned}$$

3. De två bivillkoren $g(x, y) = 3x^2 + y^2 \le 4$ och $h(x, y) = 3x + y \ge 0$ bestämmer en sluten och begränsad mängd, och målfunktionen $f(x, y) = 2x + xy$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (2 + y, x)$, $\nabla g = (6x, 2y)$ och $\nabla h = (3, 1)$. Kandidatjakt:

   - dim 2 (inre punkter, $g < 4$, $h > 0$): $\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow (x, y) = (0, -2)$, men $h \not> 0$ i den punkten. Ingen kandidat här.
   - dim 1, består av två delar:
     - (ellipsbiten $g = 4$, $h > 0$):

       $$\nabla f \parallel \nabla g \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} 2 + y & x \\ 6x & 2y \end{vmatrix} = 2(y^2 + 2y - 3x^2),$$

       d.v.s. $3x^2 = y^2 + 2y$, som insatt i $g = 4$ ger $y^2 + y = 2$, d.v.s. $y = 1$ eller $y = -2$. Fallet $y = 1$ ger efter kontroll mot $h > 0$ kandidaten $f(1, 1) = 3$ (den andra punkten man får, $(-1, 1)$, ligger utanför), medan fallet $y = -2$ inte ger någon kandidat (punkten $(0, -2)$ ligger utanför).
     - (sträckan $g < 4$, $h = 0$): $\nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow (2 + y, x) \parallel (3, 1) \Leftrightarrow y + 2 = 3x$, som efter insättning i $h = 0$ och kontroll mot $g < 4$ ger kandidaten $f(1/3, -1) = 1/3$.
   - dim 0 (hörn, $g = 4$, $h = 0$): Ekvationssystemet $g = 4$, $h = 0$ ger genast kandidaterna $f(1/\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 2/\sqrt{3} - 1$ och $f(-1/\sqrt{3}, \sqrt{3}) = -2/\sqrt{3} - 1$.

   <u>Svar</u>: $f_{\max} = f(1, 1) = 3$, $f_{\min} = f(-1/\sqrt{3}, \sqrt{3}) = -2/\sqrt{3} - 1$.

4. Sätt $F(x, y, z) = x^2 + 3z^2 - xy - 3yz$; då är den givna ytan nivåytan $F(x, y, z) = 44$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a, b, c) på ytan är parallellt med det givna planet, $3x - 4y + 3z = 0$, precis då $\nabla F(a, b, c) \parallel (3, -4, 3)$ och $F(a, b, c) = 44$, d.v.s. precis då $(2a - b, -a - 3c, 6c - 3b) \parallel (3, -4, 3)$ och $a^2 + 3c^2 - ab - 3bc = 44$. Det första villkoret

ger $2a - b = 6c - 3b$ och $3(a + 3c) = 4(2a - b)$, alltså $a = 7c/3$ och $b = 2c/3$, som insatt i det andra ger $c^2 = 9$, d.v.s. $c = \pm 3$, och därmed tangeringspunkterna $(7, 2, 3)$ och $(-7, -2, -3)$, med de respektive tangentplanen $3x - 4y + 3z = \pm 22$.

Svar: Planen är $3x - 4y + 3z = 22$ och $3x - 4y + 3z = -22$.

5. Integralen är generaliserad, men integranden är positiv, så vi kan använda variabelbyte och upprepad integration.

   Eftersom $x^2 + 4xy + 8y^2 = (x + 2y)^2 + (2y)^2$ gör vi först det linjära bytet $u = x + 2y$, $v = 2y$, som ger $dudv = |d(u, v)/d(x, y)|dxdy = 2\,dxdy$ och nytt område $E = \mathbf{R}^2$, och därefter det planpolära bytet $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$ med ny mängd $F : 0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ och $dudv = \rho\, d\rho d\varphi$, varför

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-4xy-8y^2}\,dxdy = \iint_E e^{-u^2-v^2}\,\frac{dudv}{2} = \frac{1}{2}\iint_F e^{-\rho^2}\rho\,d\rho d\varphi = \pi\left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

6. (a) Standardutvecklingarna $e^t = 1 + t + \mathcal{O}(t^2)$ och $\ln(1 + t) = t + \mathcal{O}(t^2)$ ger

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - f(0, 0, 0) &= x^2 + 3y^2 + e^{z^2} + \ln(3 + yz) - (1 + \ln 3) \\ &= x^2 + 3y^2 + e^{z^2} - 1 + \ln(1 + yz/3) \\ &= x^2 + 3y^2 + z^2 + yz/3 + \mathcal{O}(r^4) \\ &= x^2 + (z + y/6)^2 + 107y^2/36 + \mathcal{O}(r^4), \end{aligned}$$

   där den kvadratiska formen $Q(x, y, z) = x^2 + (z + y/6)^2 + 107y^2/36$ är positivt definit; således har f lokalt minimum i punkten $(0, 0, 0)$.

   (b) Eftersom

$$\nabla f = \left(2x, 6y + \frac{z}{3 + yz}, 2ze^{z^2} + \frac{y}{3 + yz}\right) = (0, -4, 4e^4 - 1) \neq \mathbf{0}$$

   då $(x, y, z) = (0, -1, 2)$ ser vi att denna punkt inte ens är stationär för f.

Svar: (a) Lokalt minimum (b) Ingetdera

7. Sätt $F(x, y) = \sin(x^2y) - y^3$. Eftersom $F \in \mathcal{C}^1$, $F(0, -1) = 1$ och $F'_y = x^2\cos(x^2y) - 3y^2 = -3 \neq 0$ då $(x, y) = (0, -1)$ ger implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x, y) = 1$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y(x)$ i en omgivning till $(0, -1)$.

   Implicit derivering av $\sin(x^2y) - y^3 = 1$ m.a.p. x i en omgivning av $x = 0$ ger

$$y' = \frac{2y\cos(x^2y)}{3y^2 - x^2\cos(x^2y)} \cdot x,$$

   och eftersom $2y\cos(x^2y)$ ligger nära -2 och $3y^2 - x^2\cos(x^2y)$ ligger nära 3 då (x, y) ligger nära $(0, -1)$ inser vi att $y'(x)$ uppvisar teckenväxlingen $+\,0\,-$ då x passerar 0 åt höger. Alltså har $y(x)$ lokalt maximum då $x = 0$.

Svar: Lokalt maximum.