Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys TATA43

2011-10-17 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till
$$f(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 4xy + 2xz + 2yz - 10x + 10y - 32z.$$

2. Beräkna
$$\iint_D \frac{dxdy}{x},$$
där D ges av $2x + y \geq 2$, $\ln x \leq y \leq 1$.

3. Bestäm samtliga punkter på kurvan
$$x^2 + 4y^2 = 4$$
där normallinjen går genom punkten $(-1, 0)$.

4. Låt D vara kroppen som beskrivs av olikheterna
$$z \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq z^2, \quad x^2 + y^2 + z \leq 2,$$
där x, y, z [enhet m] är rumskoordinater, och som har en variabel densitet som beskrivs av funktionen $\rho(x,y,z) = 1/(1 + x^2 + y^2)$ [enhet kg/m^3]. Beräkna den totala massan av D.

5. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av
$$f(x,y) = (x - 2y)e^{-x}$$
då $0 \leq y \leq 1$, $x \in \mathbf{R}$.

6. Låt (ρ, φ) vara polära koordinater i xy-planet. Beräkna andraderivatan $\dfrac{\partial^2 f}{\partial\rho\partial\varphi}$ i punkten $(x,y) = (0,2)$, om funktionen f där har derivator $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 7$ och $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 5$.

7. Avgör om
$$f(x,y) = 4(\cos x + \cos y) + \frac{1}{1 - (x+y)^2}$$
har ett lokalt maximum eller minimum i origo.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2011-10-17

1. De stationära punkterna bestäms av ekvationssystemet $f'_x = 2x - 4y + 2z - 10 = 0$, $f'_y = 10y - 4x + 2z + 10 = 0$, $f'_z = 16z + 2x + 2y - 32 = 0$, som löses som i linjär algebra och ger den enda stationära punkten $(x, y, z) = (1, -1, 2)$. Beräkning av andraderivatorna ger den kvadratiska formen Q där

$$Q/2 = h^2 + 5k^2 + 8l^2 - 4hk + 2hl + 2kl = (h - 2k + l)^2 + (k + 3l)^2 - 2l^2.$$

Teckenkaraktären $+ + -$ visar att Q är indefinit (t.ex. är $Q(1, 0, 0) = 2 > 0$ medan $Q(7, 3, -1) = -4 < 0$), så punkten $(1, -1, 2)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

Svar: Lokala extrempunkter saknas.

2. Vi väljer att integrera med avseende på x först, då y-integration först skulle kräva uppdelning av integralen. Tvärsnitten blir $1 - y/2 \leq x \leq e^y$ och projektionen på y-axeln $0 \leq y \leq 1$. Detta ger, med $t = 1 - y/2$ i ett senare steg,

$$\iint_D \frac{dxdy}{x} = \int_0^1 \left(\int_{1-y/2}^{e^y} \frac{dx}{x} \right) dy = \int_0^1 \big(y - \ln(1 - y/2)\big) dy = \frac{1}{2} - \int_{1/2}^1 2 \ln t \, dt$$
$$= \frac{1}{2} - 2 \left[t \ln t - t \right]_{1/2}^1 = \frac{3}{2} - \ln 2.$$

3. Beteckna den sökta punkten med (a, b). Vi har $a^2 + 4b^2 = 4$, då (a, b) ligger på ellipsen $f = 4$, där $f(x, y) = x^2 + 4y^2$. En normalvektor till ellipsen i denna punkt är $\nabla f(a, b) = (2a, 8b)$. Att normallinjen i (a, b) går genom $(-1, 0)$ innebär att det finns $t \in \mathbf{R}$ så att

$$(a, b) + t(2a, 8b) = (-1, 0),$$

det vill säga $(-1 - a, -b)$ är parallell med $(2a, 8b)$. Ekvivalent är kravet att

$$\begin{vmatrix} -1 - a & 2a \\ -b & 8b \end{vmatrix} = -8b - 6ab = -2b(4 + 3a) = 0.$$

Fall 1: $b = 0$, som ger $a^2 = 4$ och punkterna $(2, 0)$ och $(-2, 0)$. Fall 2: $a = -4/3$, som ger $b^2 = 1 - (-4/3)^2/4 = 5/9$ och punkterna $(-4/3, \sqrt{5}/3)$ och $(-4/3, -\sqrt{5}/3)$.

Svar: $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(-4/3, \sqrt{5}/3)$ och $(-4/3, -\sqrt{5}/3)$.

4. Massan m är trippelintegralen av densiteten. Vi beräknar denna med upprepad integration och endimensionella tvärsnitt $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$ i z-led. Projektionen $\tilde{D}$ på xy-planet bestäms i planpolära koordinater (ρ, φ) av $\rho \leq 2 - \rho^2$, det vill säga $0 \leq \rho \leq 1$, där som vanligt $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. $\tilde{D}$ är alltså enhetsskivan, och massan [kg] blir

$$m = \iiint_D \frac{dxdydz}{1 + x^2 + y^2} = \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} \frac{dz}{1 + x^2 + y^2} \right) dxdy$$
$$= \iint_{\tilde{D}} \frac{(2 - x^2 - y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2} \, dxdy = 2\pi \int_0^1 \frac{2 - \rho^2 - \rho}{1 + \rho^2} \rho \, d\rho$$
$$= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{1 + 3\rho}{1 + \rho^2} - 1 - \rho \right) d\rho = \pi \left(\frac{\pi}{2} + 3 \ln 2 - 3 \right).$$

5. Vi har $f'_x = (1-x+2y)e^{-x}$ och $f'_y = -2e^{-x} < 0$. Funktionen har därför inga stationära punkter. På randen $y = 0$ har funktionen $g(x) = f(x,0) = xe^{-x}$ derivatan $g'(x) = (1-x)e^{-x}$ och en stationär punkt $x = 1$. På randen $y = 1$ har funktionen $h(x) = f(x,1) = (x-2)e^{-x}$ derivatan $h'(x) = (3-x)e^{-x}$ och en stationär punkt $x = 3$. Kandidater till största och minsta värde blir $f(1,0) = e^{-1}$ och $f(3,1) = e^{-3}$. Då området är obegränsat är det inte säkert att största och minsta värde finns, och vi behöver undersöka gränsvärden mot oändligheten. Vi har

$$(x-2)e^{-x} \le f(x,y) \le xe^{-x}, \qquad 0 \le y \le 1.$$

I området gäller alltså $f(x,y) \to -\infty$ då $x \to -\infty$ och $f(x,y) \to 0 < e^{-1}$ då $x \to \infty$. Vi drar slutsatsen att f saknar minsta värde, och antar sitt största värde e^{-1} i $(1,0)$.

<u>Svar</u>: $f_{\max} = f(1,0) = 1/e$. $f_{\min}$ existerar inte.

(Alternativt kan man fixera $y = b$ och studera $g(x) = f(x,b) = (x-2b)e^{-x}$ med vanliga envariabelmetoder: $g_{\max} = g(2b+1) = e^{-(2b+1)}$, medan $g(x) \to -\infty$ då $x \to -\infty$. Eftersom $0 \le b \le 1$ får vi maximum e^{-1} då $b = 0$, medan minimum inte existerar.)

6. För polärt variabelbyte $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, ger kedjeregeln $f'_\rho = (\cos\varphi)f'_x + (\sin\varphi)f'_y$, $f'_\varphi = -\rho(\sin\varphi)f'_x + \rho(\cos\varphi)f'_y$. Detta ger i $(\rho,\varphi) = (2,\pi/2)$

$$\begin{aligned}
f''_{\rho\varphi} &= ((\cos\varphi)f'_x + (\sin\varphi)f'_y)'_\varphi \\
&= -(\sin\varphi)f'_x + (\cos\varphi)(-\rho(\sin\varphi)f''_{xx} + \rho(\cos\varphi)f''_{xy}) \\
&\quad + (\cos\varphi)f'_y + (\sin\varphi)(-\rho(\sin\varphi)f''_{yx} + \rho(\cos\varphi)f''_{yy}) \\
&= -(\sin\varphi)f'_x + (\cos\varphi)f'_y + \rho(\cos\varphi\sin\varphi)(f''_{yy} - f''_{xx}) + \rho(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)f''_{xy} \\
&= -5 + 0 + 0 - 14 = -19.
\end{aligned}$$

7. Vi beräknar först att f har en stationär punkt med kvadratisk form $Q(h,k) = -2(h-k)^2$ i origo. Denna är negativt semi-definit, och ingen slutsats om lokalt extremvärde kan dras av detta. Den kvadratiska formens utseende leder oss till att studera f längs linjen $x = y$. Med envariabel-Maclaurinutveckling har vi

$$f(x,x) = 8\cos x + \frac{1}{1-4x^2} = 9 + (16 + 1/3)x^4 + \mathcal{O}(x^6) > 9$$

för alla små $x \neq 0$. Å andra sidan har vi längs linjen $y = -x$ att

$$f(x,-x) = 8\cos x + 1 < 9$$

för alla små $x \neq 0$. Alltså har f inget lokalt extremvärde i origo.