Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys TATA43

2011-08-18 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Beräkna
$$\iint_D e^{-y/x}\,dxdy,$$
där D begränsas av x-axeln, linjen $x = 1$ och kurvan $x = \sqrt{y}$.

2. Beräkna
$$\iiint_D xz\,dxdydz,$$
där D ges av $x^2 + y^2 + z^2 \le 3,\ z \ge 0$ and $y \le x$.

3. En brunbjörn vaknar i ett ide i Orsa. Lufttemperaturen T [°C] beror på x och y [m] enligt
$$T(x, y) = 10 - \frac{5}{3 + x^2 + 2y^2}.$$
Björnen befinner sig i $(x, y) = (3, 2)$ och lufsar med hastigheten 2 m/s. I vilken riktning bör den lufsa för snabbast möjliga uppvärmning? Beräkna dessutom, dels i °C/m och dels i °C/s, hur snabbt temperaturen då stiger.

4. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till
$$f(x, y) = 3\ln(1 + x^2 + y^2) + 2xy.$$

5. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av funktionen $f(x, y, z) = x^2+y^2+2z$ då $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x \ge z$.

6. Visa att avbildningen $\begin{cases} u = 3x + \sin 4y \\ v = 3x - 5y \end{cases}$ har en global $\mathcal{C}^1$-invers $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$.
Beräkna sedan x'_v i punkten $(u, v) = (3, 3)$.

7. Antag att $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Antag vidare att
$$f(0, 0) = 0, f'_x(0, 0) = 3, f'_y(0, 0) = -2,$$
$$f''_{xx}(0, 0) = -1, f''_{xy}(0, 0) = 5 \text{ och } f''_{yy}(0, 0) = 4.$$
Sätt $g(t) = f(t, 2t)$ och $h(t) = f\left(g(t), \sin\left(3g(t)\right)\right)$. Beräkna $g'(0), h'(0)$ och $h''(0)$.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2011-08-18

1. Vi integrerar lämpligtvis med avseende på y innerst. Projektionen av D på x-axeln är $0 \le x \le 1$ och tvärsnittet ovanför $x \in [0,1]$ är $0 \le y \le x^2$. Integralen blir

$$\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} e^{-y/x} dy \right) dx = \int_0^1 \left[-xe^{-y/x} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx = \left[\frac{x^2}{2} + (x+1)e^{-x} \right]_0^1 = \frac{4-e}{2e}.$$

2. De tre olikheterna som definierar D blir i rymdpolära koordinater i tur och ordning $0 \le r \le \sqrt{3}$, $0 \le \theta \le \pi/2$ respektive $-3\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$, så rymdpolärt variabelbyte ger

$$\begin{aligned}\iiint_D xz\,dxdydz &= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sqrt{3}} (r\sin\theta\cos\varphi)(r\cos\theta)r^2 \sin\theta\,dr \right) d\theta \right) d\varphi \\ &= \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^{\sqrt{3}} \cdot \left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_0^{\pi/2} \cdot [\sin\varphi]_{-3\pi/4}^{\pi/4} = \frac{3\sqrt{6}}{5}.\end{aligned}$$

3. Vi beräknar i punkten $(3,2)$ gradienten $\nabla T = (10x/(3+x^2+2y^2)^2, 20y/(3+x^2+2y^2)^2) = (3/40, 4/40)$, mätt i °C/m. Björnen bör alltså lufsa i riktningen som pekas ut av vektorn $(3,4)$. Temperaturökningen, mätt i °C/m, blir då $|\nabla T| = \sqrt{3^2+4^2}/40 = 1/8$ °C/m, medan den mätt i °C/s blir $(1/8\,°\mathrm{C/m}) \cdot (2\,\mathrm{m/s}) = 1/4$ °C/s.

4. Ekvationerna för de stationära punkterna blir $f'_x = 6x/(1+x^2+y^2) + 2y = 0$ och $f'_y = 6y/(1+x^2+y^2) + 2x = 0$. Om man subtraherar x gånger den andra ekvationen från y gånger den första får man genast $y^2 = x^2$, d.v.s. $y = \pm x$. Fallet $y = x$ insatt i ursprungsekvationerna ger $x = 0$ eller $x^2 = -2$, d.v.s. endast punkten $(0,0)$. Fallet $y = -x$ insatt i ursprungsekvationerna ger $x = 0$ eller $x^2 = 1$, d.v.s. punkterna $(0,0)$ (igen!), $(1,-1)$ och $(-1,1)$. Sålunda finns tre stationära punkter: $(0,0)$, $(1,-1)$ och $(-1,1)$. Vidare, ytterligare deriveringar ger andraderivatorna $f''_{xx} = 6(1-x^2+y^2)/(1+x^2+y^2)^2$, $f''_{xy} = -12xy/(1+x^2+y^2)^2 + 2$ och $f''_{xx} = 6(1+x^2-y^2)/(1+x^2+y^2)^2$.

Kvadratisk form i $(0,0)$:

$$\begin{aligned}Q(h,k) &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= 6h^2 + 4hk + 6k^2 = 6(h+k/3)^2 + (16/3)k^2,\end{aligned}$$

som är positivt definit eftersom $Q(h,k) \ge 0$ för alla (h,k) och $Q(h,k) = 0$ endast för $h + k/3 = 0$ och $k = 0$, d.v.s. endast för $(h,k) = (0,0)$. Således är punkten $(0,0)$ en lokal minimipunkt för f.

De kvadratiska formerna i $(1,-1)$ och $(-1,1)$ blir desamma, nämligen

$$Q(h,k) = (2/3)h^2 + (20/3)hk + (2/3)k^2 = (2/3)(h+5k)^2 - 16k^2,$$

som är indefinit eftersom t.ex. $Q(1,0) = 2/3 > 0$ medan $Q(-5,1) = -16 < 0$, så $(1,-1)$ och $(-1,1)$ är sadelpunkter och därmed inga lokala extrempunkter.

Svar: $(0,0)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

5. De två bivillkoren $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $h(x,y,z) = x - z \ge 0$ bestämmer en sluten halvsfär – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

Vi får $\nabla f = (2x, 2y, 2)$, $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ och $\nabla h = (1, 0, -1)$. Kandidatjakt:

- Kandidater på halvsfären $g = 1$, $h > 0$ finns där $\nabla f \parallel \nabla g$, d.v.s. där $\nabla f \times \nabla g = \mathbf{0}$, alltså där $(z-1)y = 0$ och $(1-z)x = 0$. Falluppdelning: (1) $z = 1$ ger $x^2+y^2 = 0$ och punkten $(0, 0, 1)$; detta är en falsk lösning eftersom $h \not> 0$; (2) $z \neq 1$ ger $x = y = 0$ och $z^2 = 1$, och kontroll mot $h > 0$ ger kandidaten $f(0, 0, -1) = -2$.
- Kandidater på cirkeln $g = 1$, $h = 0$ finns där

$$\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\} \text{ är linjärt beroende, d.v.s. där } \quad 0 = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4y(z-1).$$

  Falluppdelning: (1) $z = 1$ ger $x = 1$, $y^2 = -1$, ingen lösning; (2) $y = 0$ ger $x = z$, $2x^2 = 1$ och därmed kandidaterna $f(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = 1/2 + \sqrt{2}$ och $f(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) = 1/2 - \sqrt{2}$.

  Svar: $f_{\max} = f(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = 1/2 + \sqrt{2}$ och $f_{\min} = f(0, 0, -1) = -2$.

6. Vi visar först att avbildningen har en global invers. Subtraktion av ekvationerna ger $u - v = \sin(4y) + 5y$. Funktionen $f(y) = \sin(4y) + 5y$ har $f'(y) = 4\cos(4y) + 5 \geq 1$. Alltså är f strängt växande med $\lim_{y\to\pm\infty} f(y) = \pm\infty$, så f är en inverterbar envariabelfunktion. Givet godtyckligt (u, v) beräknar vi entydigt $y = f^{-1}(u - v)$ och sedan $x = (v + 5y)/3$. Detta visar avbildningens globala inverterbarhet. Speciellt ser vi genom prövning att $(u, v) = (3, 3)$ motsvarar $(x, y) = (1, 0)$.

   Beräkna nu funktionalmatrisen

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4\cos(4y) \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

   Funktionaldeterminanten är $-15 - 12\cos(4y) \leq -3 < 0$, och speciellt $\neq 0$, för alla (x, y). Inversa funktionssatsen visar nu att avbildningens invers är $\mathcal{C}^1$ kring alla (u, v). Vidare följer att inversens funktionalmatris i $(u, v) = (3, 3)$, motsvarande $(x, y) = (1, 0)$, är

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-27}\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix},$$

   från vilken vi avläser $x'_v = (-4)/(-27) = 4/27$.

7. Kedjeregeln ger $g'(t) = f'_x(t, 2t) + 2f'_y(t, 2t)$ och

$$h'(t) = f'_x(g(t), \sin(3g(t)))g'(t) + f'_y(g(t), \sin(3g(t)))3g'(t)\cos(3g(t)).$$

   Insatta värden ger $g'(0) = 3 + 2(-2) = -1$ och $h'(0) = 3(-1) + (-2)3(-1)1 = 3$. Ytterligare kedje- och produktregler ger, med (t) utelämnat,

$$\begin{aligned} h'' = {} & \Big(f''_{xx}(g, \sin 3g)g' + f''_{xy}(g, \sin 3g)3g'\cos(3g)\Big)g' + f'_x(g, \sin 3g)g'' \\ & + \Big(f''_{yx}(g, \sin 3g)g' + f''_{yy}(g, \sin 3g)3g'\cos(3g)\Big)3g'\cos(3g) \\ & + f'_y(g, \sin 3g)3\Big(g''\cos(3g) - 3(g')^2\sin(3g)\Big). \end{aligned}$$

   Vi beräknar $g''(0) = f''_{xx}(t, 2t) + 4f''_{xy}(t, 2t) + 4f''_{yy}(t, 2t)_{|t=0} = -1 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 4 = 35$ och

$$\begin{aligned} h''(0) = {} & \Big((-1)(-1) + 5 \cdot 3(-1)1\Big)(-1) + 3 \cdot 35 + \Big(5(-1) + 4 \cdot 3(-1)1\Big)3(-1)1 \\ & + (-2)3(35 \cdot 1 - 0) = 14 + 105 + 51 - 210 = -40. \end{aligned}$$

   Svar: $g'(0) = -1$, $h'(0) = 3$ och $h''(0) = -40$.