Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys TATA43

2011-05-31 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-lösningar $z(x,y)$ till differentialekvationen $xyz'_x - z'_y = x^2e^{y^2}$ för $x > 0$ under randvillkoret $z(x,0) = e^{x^2}$ genom att till exempel göra variabelbytet $u = x^2e^{y^2}$, $v = y$.

2. Bestäm alla plan som tangerar ytan $x^4 + y^2 - z^2 = 1$ och är parallella med planet $2x + y + z = 1$.

3. Beräkna
$$\iint_D \left((x-1)^2 + 2y^2\right) dxdy,$$
där D ges av $x^2 + 2x + 2y^2 \leq 3$.

4. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till
$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2yz + \frac{2}{3}z^3.$$

5. Beräkna
$$\iiint_D (x-y)\, dxdydz,$$
där D ges av $0 \leq x + y \leq y + z \leq x - 3z \leq 1$.

6. Bestäm ett rätblock med volym 8, total kantlängd 40 och där sidoytornas sammanlagda area är så liten som möjligt. Motivera noga varför det finns en minsta area.

7. (a) Definiera vad som menas med att en funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ är differentierbar i (a,b).

   (b) Visa att om $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ är differentierbar i (a,b) så är f partiellt deriverbar där.

   (c) Avgör om funktionen
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 + 2y^3 + x^4}{x^2 + 2y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   är differentierbar i origo.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2011-05-31

1. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = 2x\,e^{y^2} z'_u$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = 2x^2 y\,e^{y^2} z'_u + z'_v$, och insättning i differentialekvationen ger $-z'_v = u$, d.v.s. $z'_v = -u$, som integrerad ger $z = -uv + g(u) = -x^2 y\,e^{y^2} + g(x^2 e^{y^2})$, där g är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Bivillkoret ger nu $e^{x^2} = z(x,0) = g(x^2)$ då $x > 0$, så $g(t) = e^t$ för $t > 0$, och därmed får vi till sist $z(x,y) = -x^2 y\,e^{y^2} + \exp(x^2 e^{y^2})$ då $x > 0$. Svar: $z(x,y) = -x^2 y\,e^{y^2} + \exp(x^2 e^{y^2})$.

2. Sätt $F(x,y,z) = x^4 + y^2 - z^2$; då är den givna ytan nivåytan $F(x,y,z) = 1$. Tangentplanet till denna yta i en punkt (a,b,c) på ytan är parallellt med planet $2x + y + z = 1$ precis då $\nabla F(a,b,c) \parallel (2,1,1)$ och $F(a,b,c) = 1$, d.v.s. precis då $(4a^3, 2b, -2c) \parallel (2,1,1)$ och $a^4 + b^2 - c^2 = 1$. Det första villkoret ger $a^3 = b = -c$, som sedan insatt i det andra ger $a^4 = 1$, d.v.s. $a = \pm 1$, och därmed tangeringspunkterna $(1,1,-1)$ och $(-1,-1,1)$, med de respektive tangentplanen $2x + y + z = \pm 2$.

   Svar: Planen är $2x + y + z = 2$ och $2x + y + z = -2$.

3. D kan skrivas $(x+1)^2 + 2y^2 \le 4$. Linjärt byte $u = x + 1$, $v = \sqrt{2}\,y$ med ny mängd E : $u^2 + v^2 \le 4$, $d(u,v)/d(x,y) = \sqrt{2}$ och därmed $dxdy = dudv/\sqrt{2}$, följt av planpolärt byte $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$ med ny mängd F : $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ och $dudv = \rho\,d\rho d\varphi$, ger

$$\iint_D \big((x-1)^2 + 2y^2\big)\,dxdy = \iint_E \big((u-2)^2 + v^2\big)\,\frac{dudv}{\sqrt{2}} = \iint_F (\rho^2 - 4\rho\cos\varphi + 4)\frac{\rho\,d\rho d\varphi}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (\rho^2 - 4\rho\cos\varphi + 4)\,d\varphi\right)\rho\,d\rho = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{(\rho^2+4)^2}{4}\right]_0^2 = 12\sqrt{2}\,\pi.$$

4. Stationära punkter fås ur ekvationssystemet $f'_x = 2x - 2y = 0$, $f'_y = 4y - 2x + 2z = 0$, $f'_z = 2y + 2z^2 = 0$. De två första ger $x = y = -z$, som insatt i den tredje ger $2z^2 - 2z = 0$, d.v.s. $z = 0$ eller $z = 1$, och därmed är de stationära punkterna $(0,0,0)$ och $(-1,-1,1)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = -2$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yy} = 4$, $f''_{yz} = 2$ och $f''_{zz} = 4z$.

   I punkten $(0,0,0)$ blir $f''_{zz} = 0$, och där blir den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$$
$$= 2h^2 + 4k^2 - 4hk + 4kl = 2\left((h-k)^2 + (k+l)^2 - l^2\right),$$

   som är indefinit eftersom t.ex. $Q(1,0,0) = 2 > 0$ och $Q(1,1,-1) = -2 < 0$, och den stationära punkten $(0,0,0)$ är således ingen lokal extrempunkt.

   I punkten $(-1,-1,1)$ blir $f''_{zz} = 4$, och där blir den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = 2h^2 + 4k^2 - 4hk + 4kl + 4l^2 = 2\left((h-k)^2 + (k+l)^2 + l^2\right),$$

   så $Q(h,k,l) \ge 0$ för alla (h,k,l), och $Q(h,k,l) = 0$ endast om $h - k = 0$, $k + l = 0$ och $l = 0$, d.v.s. endast om $(h,k,l) = (0,0,0)$. Q är därmed positivt definit, och den stationära punkten $(-1,-1,1)$ är således en lokal minimipunkt.

   Svar: $(-1,-1,1)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

5. Linjärt byte $u = x + y$, $v = y + z$, $w = x - 3z$ ger ny mängd $E : 0 \le u \le v \le w \le 1$, $d(u, v, w)/d(x, y, z) = -2$ och därmed $dxdydz = dudvdw/2$. Med exempelvis skivor $E_w = \{(u, v) : 0 \le u \le v \le w\}$ för $0 \le w \le 1$ får vi, eftersom $x - y = 2u - 3v - w$, att

$$I = \iiint_D (x - y)\, dxdydz = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\iint_{E_w} (2u - 3v - w)\, dudv \right) dw = \frac{1}{2} \int_0^1 I(w)\, dw,$$

där

$$I(w) = \int_0^w \left(\int_0^v (2u - 3v - w)\, du \right) dv = \int_0^w (-2v^2 - vw)\, dv = -\frac{7w^3}{6},$$

varför slutligen

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{7w^3}{6} \right) dw = -\frac{7}{48}.$$

6. Låt rätblockets kantlängder vara x, y, z. I första oktanten $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ bestämmer de två bivillkoren $g(x, y, z) = xyz = 8$ (volym 8) och $h(x, y, z) = x + y + z = 10$ (total kantlängd 40) en *sluten* mängd, och där medför $h = 10$ även att $x \le 10$, $y \le 10$ och $z \le 10$, så mängden vi optimerar på är också *begränsad*, och därmed *kompakt*. Målfunktionen $f(x, y, z) = 2(xy + yz + zx)$ är kontinuerlig där, och alltså existerar (största och) minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = 2(y + z, x + z, y + x)$, $\nabla g = (yz, xz, xy)$ och $\nabla h = (1, 1, 1)$. Kandidater finns i detta fall endast där $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ är linjärt beroende, d.v.s. endast där

$$0 = 2 \begin{vmatrix} y+z & x+z & y+x \\ yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} y+z & x-y & x-z \\ yz & (x-y)z & (x-z)y \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2(x - y)(x - z)(y - z),$$

   d.v.s. endast där $x = y$ eller $x = z$ eller $y = z$. Av symmetriskäl räcker det att undersöka ett av dessa fall, t.ex. $x = y$.

   Insättning av $x = y$ i $g = 8$ och $h = 10$ ger $z = 10 - 2y$ och $y^3 - 5y^2 + 4 = 0$, och den senare ekvationen har lösningarna $y = 1$ (prövning!) och $y = 2 \pm 2\sqrt{2}$ (efter faktorisering). I första oktanten får vi således de två kandidaterna $f(1, 1, 8) = 34$ och $f(2 + 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}, 6 - 4\sqrt{2}) = 8 + 32\sqrt{2} > 34$.

   Svar: Den minsta begränsningsarean är 34 och antas då kantlängderna är 1, 1 och 8.

7. (a) Se kursboken, Definition 2 i kapitel 2.2 (fallet $n = 2$).

   (b) Se kursboken, Sats 2 i kapitel 2.2 (fallet $n = 2$).

   (c) Eftersom $(f(h, 0) - f(0, 0))/h = 2 + h \to 2$ då $h \to 0$ och $(f(0, k) - f(0, 0))/k = 1 \to 1$ då $k \to 0$ ser vi att $f'_x(0, 0) = 2$ och $f'_y(0, 0) = 1$. *Om* f är differentierbar i origo gäller alltså att $R(h, k) = (f(h, k) - f(0, 0) - 2h - k)/(h^2 + k^2)^{1/2} \to 0$ då $(h, k) \to (0, 0)$. Men

$$R(h, k) = \frac{f(h, k) - f(0, 0) - 2h - k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^4 - 4hk^2 - h^2 k}{(h^2 + 2k^2)\sqrt{h^2 + k^2}},$$

   så t.ex. $R(h, h) = (h^2 - 5h)/(3\sqrt{2}\,|h|) \to \mp 5/(3\sqrt{2})$ då $h \to 0^{\pm}$, och därmed existerar inte ens $\lim_{(h,k)\to(0,0)} R(h, k)$. Svar: f är *inte* differentierbar i origo.