Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys TATA43

2011-04-26 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Beräkna
$$\iint_D \frac{dxdy}{2x-y+1},$$
där D ges av $1 \leq x+2y \leq 2x-y \leq 2$.

2. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter till
$$f(x,y,z) = xy + x^2z - x^2 - y - z^2.$$

3. Beräkna
$$\iiint_D xz\,dxdydz,$$
där D ges av $x^2+y^2+4z^2 \leq 2$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.

4. Bestäm största och minsta värde, om de finns, av funktionen
$$f(x,y) = xy^2 - x^2 - y,$$
då $x^2 + y \leq 1$ och $y \geq 0$.

5. Undersök gränsvärdet
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{(x^2+y^2)^a}$$
för alla reella värden på a.

6. Visa att ekvationerna
$$\begin{cases} 3x + xz + y + e^y + z^2 + e^z = 2, \\ 5x + xy + yz + e^y + 2\sin z = 1, \end{cases}$$
i en omgivning av $(0,0,0)$ definierar $\mathcal{C}^1$-funktioner $x(z)$ och $y(z)$. Beräkna $x'(0)$ och $y'(0)$.

7. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-lösningar $z(x,y)$ till differentialekvationen
$$x^2 z''_{xx} + xyz''_{xy} - yz'_y = 0 \text{ då } x > 0 \text{ och } y > 0$$
under randvillkoren $z(y^2,y) = y$ och $z(x,1) = x$ genom att till exempel göra variabelbytet $\begin{cases} u = x/y \\ v = y\,. \end{cases}$

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2011-04-26

1. Ett lämpligt variabelbyte är $u = x + 2y$, $v = 2x - y$. Funktionaldeterminanten blir $d(u,v)/d(x,y) = -5$, så $dxdy = dudv/5$, och det nya området E ges av $1 \le u \le v \le 2$. Vi får
$$\iint_D \frac{dxdy}{2x-y+1} = \iint_E \frac{1}{v+1}\frac{dudv}{5} = \frac{1}{5}\int_1^2 \left(\int_1^v du\right)\frac{dv}{v+1} = \frac{1}{5}\int_1^2 \frac{v-1}{v+1}\,dv$$
$$= \frac{1}{5}\int_1^2 \left(1 - \frac{2}{v+1}\right) dv = \frac{1}{5}\left[v - 2\ln(v+1)\right]_1^2 = \frac{1-2\ln(3/2)}{5}.$$

2. De tre partiella derivatorna är $f'_x = y + 2xz - 2x$, $f'_y = x - 1$ och $f'_z = x^2 - 2z$. Ekvationerna $f'_y = 0$, $f'_z = 0$ och $f'_x = 0$ ger i tur och ordning $x = 1$, $z = 1/2$ och $y = 1$. I denna enda stationära punkt $(1,1,1/2)$ har vi andraderivator $f''_{xx} = 2z - 2 = -1$, $f''_{yy} = 0$, $f''_{zz} = -2$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{xz} = 2x = 2$ och $f''_{yz} = 0$. Vi får
$$Q(h,k,l) = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$$
$$= -h^2 - 2l^2 + 2hk + 4hl = -(h-k-2l)^2 + (k+2l)^2 - 2l^2.$$
Tecknen $-+-$ visar att Q är indefinit (t.ex. är $Q(1,0,0) = -1 < 0$ och $Q(1,1,0) = 1 > 0$) och den stationära punkten $(1,1,1/2)$ är således ingen lokal extrempunkt.

Svar: Lokala maximi- och minimipunkter saknas.

3. Linjärt byte $u = x$, $v = y$, $w = 2z$ med funktionaldeterminant $d(u,v,w)/d(x,y,z) = 2$ och nytt område $E:\ u^2 + v^2 + w^2 \le 2, u \ge 0, w \ge 0$, följt av rymdpolärt byte $u = r\sin\theta\cos\varphi$, $v = r\sin\theta\sin\varphi$, $w = r\cos\theta$, med gränser $F:\ 0 \le r \le \sqrt{2}$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$, ger
$$\iiint_D xz\,dxdydz = \iiint_E u\frac{w}{2}\frac{dudvdw}{2} = \frac{1}{4}\iiint_F r\sin\theta\cos\varphi \cdot r\cos\theta \cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{2}} r^4\,dr \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi = \frac{1}{4}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{2\sqrt{2}}{15}.$$

4. De två bivillkoren $g(x,y) = x^2 + y \le 1$ och $h(x,y) = y \ge 0$ bestämmer en kompakt mängd, och målfunktionen $f(x,y) = xy^2 - x^2 - y$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (y^2 - 2x, 2xy - 1)$, $\nabla g = (2x, 1)$ och $\nabla h = (0,1)$. Kandidatjakt:

   - dim 2 (inre punkter, $g < 1$, $h > 0$): $\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow 2x = y^2$ och $y^3 = 1 \Leftrightarrow (x,y) = (1/2, 1)$, men $g(1/2,1) = 5/4 \not< 1$. Ingen kandidat här.
   - dim 1, består av två delar:
     - (parabelkurvan $g = 1$, $h > 0$):
$$\nabla f \parallel \nabla g \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} y^2 - 2x & 2xy - 1 \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = y^2 - 4x^2y = y(y - 4x^2),$$
       d.v.s. $y = 0$ eller $y = 4x^2$, men fallet $y = 0$ är inte aktuellt eftersom $h = y > 0$. $y = 4x^2$ insatt i $g = 1$ ger $5x^2 = 1$, och kontroll mot $h > 0$ ger kandidaterna $f(\sqrt{5}/5, 4/5) = -1 + 16\sqrt{5}/125$ och $f(-\sqrt{5}/5, 4/5) = -1 - 16\sqrt{5}/125$.

- (sträckan $g < 1$, $h = 0$): $\nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow (y^2 - 2x, 2xy - 1) \parallel (0,1) \Leftrightarrow y^2 - 2x = 0$, som tillsammans med $h = 0$ och kontroll mot $g < 1$ ger kandidaten $f(0,0) = 0$.

- dim 0 (hörn, $g = 1$, $h = 0$): Ekvationssystemet $g = 1$, $h = 0$ ger genast de två kandidaterna $f(\pm 1, 0) = -1$.

Svar: $f_{\max} = f(0,0) = 0$, $f_{\min} = f(-\sqrt{5}/5, 4/5) = -1 - 16\sqrt{5}/125$.

5. Genom att undersöka gränsvärden längs kurvor in mot origo tar vi först fram en kandidat till tvåvariabelgränsvärdet. Längs x-axeln, alltså då $y = 0$, får vi

$$\frac{x^3 + 0}{(x^2 + 0)^a} = \begin{cases} x^{3-2a}, & x > 0, \\ -(-x)^{3-2a}, & x < 0, \end{cases} \to \begin{cases} 0, & a < 3/2, \\ \pm 1, & a = 3/2, \\ \pm\infty, & a > 3/2, \end{cases} \quad \text{då } x \to 0^{\pm}.$$

Tvåvariabelgränsvärdet existerar sålunda inte, inte ens oegentligt, om $a \geq 3/2$. Antag nu att $a < 3/2$, där enligt ovan den enda möjliga kandidaten till tvåvariabelgränsvädet är 0. Med polära koordinater har vi uppskattningen

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{(x^2 + y^2)^a} - 0 \right| = \left| \frac{\rho^3 \cos^3\varphi + \rho^3 \sin^3\varphi}{\rho^{2a}} \right| = \rho^{3-2a} |\cos^3\varphi + \sin^3\varphi| \leq 2\rho^{3-2a}$$

för alla φ. Då $\lim_{\rho \to 0^+} \rho^{3-2a} = 0$ när $a < 3/2$, drar vi av instängningsregeln slutsatsen att tvåvariabelgränsvärdet existerar och är lika med kandidaten 0.

Svar: Gränsvärdet existerar om och endast om $a < 3/2$ och är då 0.

6. Beteckna med F, G vänsterleden i ekvationerna, så att dessa är $F = 2$, $G = 1$. Klart är att $F, G \in \mathcal{C}^1$ och att $F(0,0,0) = 2$ och $G(0,0,0) = 1$. Vidare, i denna punkt är $\nabla F = (3+z, 1+e^y, x+2z+e^z) = (3,2,1)$ och $\nabla G = (5+y, x+z+e^y, y+2\cos z) = (5,1,2)$, och dessa är är normalvektorer till ytorna $F = 2$ och $G = 1$. En tangentvektor till skärningskurvan i $(0,0,0)$ är $\nabla F \times \nabla G = (3,2,1) \times (5,1,2) = (3,-1,-7)$, och då denna vektors z-komponent är $-7 \neq 0$, följer av implicita funktionssatsen att ekvationssystemet $F = 2$, $G = 1$ definierar $\mathcal{C}^1$-funktioner $x(z)$ och $y(z)$ kring $(0,0,0)$. Derivatorna utläses till $x'(0) = 3/(-7) = -3/7$ och $y'(0) = (-1)/(-7) = 1/7$.

Svar: $x'(0) = -3/7$ och $y'(0) = 1/7$.

7. Kedjeregeln ger $z'_x = (1/y)z'_u$ och $z'_y = -(x/y^2)z'_u + z'_v$, och sedan $z''_{xx} = (1/y^2)z''_{uu}$ och $z''_{xy} = -(x/y^3)z''_{uu} + (1/y)z''_{uv} - (1/y^2)z'_u$. Insättning i den partiella differentialekvationen ger sedan $xz''_{uv} - yz'_v = 0$, d.v.s., efter division med $x > 0$ och övergång till u och v, $z''_{uv} - (1/u)z'_v = 0$, alltså $(z'_u - (1/u)z)'_v = 0$, som integrerad m.a.p. v ger $z'_u - (1/u)z = \varphi(u)$. Integrerande faktor är här $1/u$, så $(z/u)'_u = \varphi(u)/u = \psi(u)$, som integrerad m.a.p. u ger $z/u = \Psi(u) + h(v)$, d.v.s. $z = u\Psi(u) + uh(v) = g(u) + uh(v) = g(x/y) + (x/y)h(y)$, där g och h är $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel. (Observera att $u > 0$, så bytena $\varphi(u)/u = \psi(u)$ och $u\Psi(u) = g(u)$ påverkar inte lösningsmängden utan endast beskrivningen av den.) Villkoren ger nu $y = z(y^2, y) = g(y) + yh(y)$ för $y > 0$ och $x = z(x,1) = g(x) + xh(1)$ för $x > 0$, d.v.s. $g(t) + th(t) = t$ och $g(t) + th(1) = t$ för $t > 0$. Lösningen till detta system är $h(t) = h(1)$ och $g(t) = t - th(1)$, som ger $z(x,y) = x/y - (x/y)h(1) + (x/y)h(1) = x/y$.

Svar: $z(x,y) = x/y$.