Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys TATA43

2011-01-12 kl 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 12 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Beräkna

$$\iint_D xy^2\,dxdy, \text{ där } D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + 4y^2 \leq 9 \text{ och } x \leq 0\}.$$

2. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av funktionen $f(x,y) = xy$ då $x^2 + 2xy + 4y^2 \leq 3$ och $y \leq x$.

3. Beräkna volymen av den kropp i $\mathbf{R}^3$ som begränsas av planen

$$x + y - z = 0,\ y - z = 0,\ y + z = 0 \text{ och } x + y + z = 2.$$

4. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 2yz.$$

5. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-lösningar $z(x,y)$ till differentialekvationen

$$xz''_{xy} - yz''_{yy} - z'_y = 1 \text{ för } x > y > 0$$

under randvillkoren $z(x,0) = 1 + x$ och $z(x,x) = e^x$, $x \geq 0$ genom att till exempel göra variabelbytet $\begin{cases} u = x \\ v = xy. \end{cases}$

6. Visa att ekvationen $x^2 + y + e^{x^2 y} = 1$ entydigt definierar en funktion $y = f(x)$, där $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$. Beräkna också gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2}$.

7. Beräkna

$$\iiint_D \frac{1}{1 + (x^2+y^2)^3}\,dxdydz, \text{ där } D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z^2 \leq x^2 + y^2\}.$$

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2011-01-12

1. Linjärt byte $u = x$, $v = 2y$ med $dudv = 2\,dxdy$ och nytt område $E : 1 \le u^2 + v^2 \le 9,\ u \le 0$, följt av planpolärt byte $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$ med $dudv = \rho\, d\rho d\varphi$ och nytt område $F : 1 \le \rho \le 3$, $\pi/2 \le \varphi \le 3\pi/2$, ger

$$\iint_D xy^2\, dxdy = \iint_E u(\frac{v}{2})^2\, \frac{dudv}{2} = \frac{1}{8}\int_1^3 \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi\right) \rho^4\, d\rho$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^3 = \frac{1}{8}\cdot\frac{-2}{3}\cdot\frac{242}{5} = -\frac{121}{30}.$$

2. De två bivillkoren $g(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2 \le 3$ och $h(x,y) = x - y \ge 0$ bestämmer en sluten delmängd av en ellipsskiva – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y) = xy$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

Vi får $\nabla f = (y,x)$, $\nabla g = (2x+2y, 2x+8y)$ och $\nabla h = (1,-1)$. Kandidatjakt:

- dim 2 (inre punkter, $g < 3$, $h > 0$): $\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow (y,x) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$, men $h(0,0) = 0 \not> 0$. Ingen kandidat här.
- dim 1, består av två delar:
  - $*$ (ellipskurvan $g = 3$, $h > 0$):
  $$\nabla f \parallel \nabla g \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x+2y & 2x+8y \end{vmatrix} = 8y^2 - 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2y.$$
  Fallet $x = 2y$ insatt i $g = 3$ ger $y^2 = 1/4$ och kandidaten $f(1, 1/2) = 1/2$ (den andra punkten man får, $(-1,-1/2)$, uppfyller ej kravet $h > 0$). Fallet $x = -2y$ ger analogt $y^2 = 3/4$ och kandidaten $f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2) = -3/2$ (den andra punkten man får, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}/2)$, uppfyller ej kravet $h > 0$).
  - $*$ (sträckan $g < 3$, $h = 0$) $\nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow (y,x) \parallel (1,-1) \Leftrightarrow y = -x$, som insatt i $h = 0$ och kontrollerad mot $g < 3$ ger kandidaten $f(0,0) = 0$.
- dim 0 (hörn, $g = 3$, $h = 0$): Ekvationssystemet $g = 3$, $h = 0$ ger genast $7x^2 = 3$ och $y = x$, alltså kandidaterna $f(\sqrt{3/7}, \sqrt{3/7}) = f(-\sqrt{3/7}, -\sqrt{3/7}) = 3/7$.

Svar: $f_{\max} = f(1,1/2) = 1/2$, $f_{\min} = f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2) = -3/2$.

3. Linjärt variabelbyte:

$$\begin{cases} u = x + y - z, \\ v = y - z, \\ w = y + z, \end{cases} \qquad \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad dudvdw = |2|\, dxdydz = 2\, dxdydz,$$

ger nytt område E som begränsas av de fyra planen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ och $u - v + w = 2$. Alltså är E en tetraeder med hörn i $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,-2,0)$ och $(0,0,2)$, så

$$\text{volym}(D) = \iiint_D dxdydz = \iiint_E \frac{dudvdw}{2} = \frac{1}{2}\cdot\text{volym}(E) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot 2\cdot 2}{6} = \frac{2}{3}.$$

4. Stationära punkter fås ur ekvationssystemet $f'_x = 3x^2 + 6x + 2z = 0$, $f'_y = 4y - 2z = 0$, $f'_z = 2z + 2x - 2y = 0$. De två sista ger $z = 2y$ och $x = -y$, som insatt i den första ger $3y^2 - 2y = 0$, och därmed de stationära punkterna $(0,0,0)$ och $(-2/3, 2/3, 4/3)$.

Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 6x + 6$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{xz} = 2$, $f''_{yy} = 4$, $f''_{yz} = -2$ och $f''_{zz} = 2$.

I punkten $(0, 0, 0)$ får vi den kvadratiska formen

$$Q(h, k, l) = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$$
$$= 6h^2 + 4k^2 + 2l^2 + 4hl - 4kl = 2(l + h - k)^2 + 2(k + h)^2 + 2h^2,$$

så $Q(h, k, l) \geq 0$ för alla (h, k, l), och $Q(h, k, l) = 0$ endast om $l + h - k = 0$, $k + h = 0$ och $h = 0$, d.v.s. endast om $(h, k, l) = (0, 0, 0)$. Q är alltså positivt definit, och $(0, 0, 0)$ är således en lokal minimipunkt för f.

I punkten $(-2/3, 2/3, 4/3)$ är $f''_{xx} = 2$, och vi får

$$Q(h, k, l) = 2h^2 + 4k^2 + 2l^2 + 4hl - 4kl = 2(l + h - k)^2 + 2(k + h)^2 - 2h^2,$$

som är indefinit eftersom t.ex. $Q(0, 0, 1) = 2 > 0$ och $Q(1, -1, -2) = -2 < 0$, så punkten $(-2/3, 2/3, 4/3)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

Svar: $(0, 0, 0)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

5. Kedjeregeln ger först $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + y z'_v$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = x z'_v$, och sedan $z''_{xy} = (z'_y)'_x = (x z'_v)'_x = z'_v + x(z'_v)'_x = z'_v + x(z''_{uv} + y z''_{vv})$ och $z''_{yy} = (z'_y)'_y = (x z'_v)'_y = x(z'_v)'_y = x^2 z''_{vv}$. Differentialekvationen blir $x^2 z''_{uv} = 1$, d.v.s. $z''_{uv} = 1/x^2 = 1/u^2$ i området $x > y > 0$. Integrering ger $z'_u = v/u^2 + g(u)$ och $z = -v/u + G(u) + H(v) = -y + G(x) + H(xy)$, där G och H är $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel. Villkoren ger nu $1 + x = z(x, 0) = G(x) + H(0)$ och $e^x = z(x, x) = -x + G(x) + H(x^2)$ för $x \geq 0$, alltså $G(t) = t + 1 - H(0)$ och $H(t) = H(0) - 1 + e^{\sqrt{t}}$, och därmed $z(x, y) = x - y + e^{\sqrt{xy}}$.

   Svar: $z(x, y) = x - y + e^{\sqrt{xy}}$.

6. Fixera $x = a \in \mathbf{R}$ och studera funktionen $g(y) = a^2 + y + e^{a^2 y}$. Denna är strängt växande eftersom $g'(y) = 1 + a^2 e^{a^2 y} \geq 1$ för alla y, och $g(y) \to \pm\infty$ då $y \to \pm\infty$, så det finns precis ett $b \in \mathbf{R}$ för vilket $g(b) = 1$; vi kan definiera $f(a) = b$, entydigt.

   Sätt nu $F(x, y) = x^2 + y + e^{x^2 y}$. Eftersom $F \in \mathcal{C}^1$ och $F'_y = 1 + x^2 e^{x^2 y} \geq 1$ (och därmed speciellt $\neq 0$) för alla (x, y), ger implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x, y) = 1$ definierar en lokal $\mathcal{C}^1$-funktion $y(x)$ kring varje punkt (a, b) som uppfyller $F(a, b) = 1$. Tack vare entydigheten i första stycket ovan följer det att dessa lokala funktioner $y(x)$ måste sammanfalla med $f(x)$, som därmed är $\mathcal{C}^1$.

   $\mathcal{C}^1$-funktionen f uppfyller ekvationen $1 = F(x, f(x)) = x^2 + f(x) + e^{x^2 f(x)}$, $x \in \mathbf{R}$. Insättning av $x = 0$ här ger $f(0) = 0$, och om $x \neq 0$ gäller $f(x) \neq 0$ (ty $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0$) och

$$\frac{f(x)}{x^2} = -f(x) \cdot \frac{e^{x^2 f(x)} - 1}{x^2 f(x)} - 1 \to -f(0) \cdot 1 - 1 = -1, \quad x \to 0,$$

   där vi använt standardgränsvärdet $(e^t - 1)/t \to 1$ då $t \to 0$. Svar: Gränsvärdet är -1.

7. Integralen är generaliserad, men integranden är positiv, så upprepad integration och variabelbyte är tillåtet. Med stavar i z-led ges D av $-\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, så med planpolära koordinater (eventuellt följt av bytet $t = \rho^3$) får vi

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{1 + (x^2 + y^2)^3} = \iint_{\mathbf{R}^2} \left(\int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \right) \frac{dxdy}{1 + (x^2 + y^2)^3}$$
$$= \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy}{1 + (x^2 + y^2)^3} = 2\pi \int_0^\infty \frac{2\rho^2\, d\rho}{1 + \rho^6} = \frac{4\pi}{3} \left[\arctan(\rho^3)\right]_0^\infty = \frac{2\pi^2}{3}.$$