Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys

2010-08-19 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-lösningar $z(x,y)$ till differentialekvationen

$$z'_x - y\, z'_y = \cos x$$

   under bivillkoret $z(\pi, y) = y$, till exempel med hjälp av variabelbytet $\begin{cases} u = x \\ v = ye^x \end{cases}$

2. Beräkna $\displaystyle\iiint_D e^{2z}\, dxdydz$, där $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}$.

3. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x,y,z) = xy - x^2 - y^2 - z^2 + \frac{1}{2}x^3.$$

4. Bestäm största och minsta värdet, om de finns, av funktionen $f(x,y) = x^2+6xy+y^2$ på den del av cirkelskivan $x^2+y^2 \leq 5$ där $x+1 \geq 0$.

5. Beräkna $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{1+x^2y^2}\, dxdy$, där D är det område i första kvadranten som ges av $1 \leq \dfrac{y}{x} \leq xy \leq \sqrt{3}$.

6. Visa att avbildningen

$$\begin{cases} u = xe^y + y\ln x \\ v = x^3 + y^3 \end{cases}$$

   i en omgivning av punkten $(x,y) = (1,0)$ har en $\mathcal{C}^1$-invers som är definierad i en motsvarande omgivning av $(u,v) = (1,1)$. Låt Γ vara en kurva i (u,v)-planet som går genom punkten $(1,1)$ och som i den punkten har tangentvektorn $(2,9)$. Den inversa avbildningen $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ avbildar Γ på en kurva C i (x,y)-planet. Bestäm tangentvektorn till C i punkten $(1,0)$.

7. Låt f vara en $\mathcal{C}^1$-funktion och betrakta ytan $y = xf\left(\dfrac{z}{x}\right)$, $x > 0$. Visa att alla tangentplan till ytan innehåller origo.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2010-08-19

1. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + ye^x z'_v$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = e^x z'_v$, så differentialekvationen blir $z'_x - yz'_y = z'_u = \cos x = \cos u$. Integrering ger $z = \sin u + g(v) = \sin x + g(ye^x)$, och villkoret $z(\pi, y) = \sin\pi + g(ye^\pi) = g(ye^\pi) = y$ ger $g(t) = te^{-\pi}$, och därmed $z(x,y) = \sin x + ye^{x-\pi}$. Svar: $z(x,y) = \sin x + ye^{x-\pi}$.

2. Med skivor $D_z : \sqrt{x^2+y^2} \le z$ på fixa z-nivåer (cirkelskivor med radie z), $0 \le z \le 1$, får vi, så småningom med upprepad partiell integration,

$$\iiint_D e^{2z} dxdydz = \int_0^1 e^{2z} \left(\iint_{D_z} dxdy \right) dz = \int_0^1 e^{2z} \operatorname{area}(D_z)\, dz$$
$$= \int_0^1 e^{2z} \pi z^2 \, dz = \frac{\pi}{4} \left[e^{2z}(2z^2 - 2z + 1) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}(e^2 - 1).$$

(Alternativ: Stavar i z-led, $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$ och projektion $\tilde{D} : x^2+y^2 \le 1$ i xy-planet går också: $\iiint_D e^{2z}\, dxdydz = \iint_{\tilde{D}} (e^2/2 - e^{2\sqrt{x^2+y^2}}/2)\, dxdy = \pi \int_0^1 (e^2 - e^{2\rho})\rho \, d\rho = ...$)

3. Stationära punkter fås ur ekvationssystemet $f'_x = y - 2x + 3x^2/2 = 0$, $f'_y = x - 2y = 0$, $f'_z = -2z = 0$. Den andra ger $y = x/2$, som insatt i den första ger $3x^2/2 - 3x/2 = 0$, alltså $x = 0$ eller $x = 1$. Vi får lösningarna $(x,y,z) = (0,0,0)$ och $(1, 1/2, 0)$, som därmed är funktionens stationära punkter.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 3x - 2$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yy} = -2$, $f''_{yz} = 0$ och $f''_{zz} = -2$. I punkten $(0,0,0)$ blir $f''_{xx} = -2$, och den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$$
$$= -2h^2 + 2hk - 2k^2 - 2l^2 = -2(h - k/2)^2 - (3/2)k^2 - 2l^2,$$

   så $Q(h,k,l) \le 0$ för alla (h,k,l), och $Q(h,k,l) = 0$ endast om $h - k/2 = 0$, $k = 0$ och $l = 0$, d.v.s. endast om $(h,k,l) = (0,0,0)$. Q är alltså negativt definit, och punkten $(0,0,0)$ är därmed en lokal maximipunkt för f.

   I punkten $(1, 1/2, 0)$ blir $f''_{xx} = 1$, och den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = h^2 + 2hk - 2k^2 - 2l^2 = (h+k)^2 - 3k^2 - 2l^2,$$

   så Q är indefinit: t.ex. är $Q(1,0,0) = 1 > 0$ och $Q(0,1,0) = -2 < 0$. Punkten $(1, 1/2, 0)$ är alltså ingen lokal extrempunkt för f.

   Svar: $(0,0,0)$ är en lokal maximipunkt. Lokala minimipunkter saknas.

4. De två bivillkoren $g(x,y) = x^2 + y^2 \le 5$ och $h(x,y) = x + 1 \ge 0$ bestämmer en sluten delmängd av en cirkelskiva – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y) = x^2 + 6xy + y^2$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (2x + 6y, 6x + 2y)$, $\nabla g = (2x, 2y)$ och $\nabla h = (1, 0)$. Kandidatjakt:

   - dim 2 (inre punkter, $g < 5$, $h > 0$): $\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow (2x + 6y, 6x + 2y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$, som uppfyller $g < 5$ och $h > 0$. Kandidat $f(0,0) = 0$.
   - dim 1, består av två delar:

* (cirkelbågen $g=5,\ h>0$):

$$\nabla f \parallel \nabla g \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} 2x+6y & 6x+2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 12(y^2-x^2) \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = x^2.$$

Insättning i $g=5$ ger fyra punkter, $(\pm\sqrt{5/2}, \pm\sqrt{5/2})$, av vilka $(\sqrt{5/2}, \pm\sqrt{5/2})$ uppfyller $h>0$. Kandidater: $f(\sqrt{5/2}, \sqrt{5/2}) = 20$, $f(\sqrt{5/2}, -\sqrt{5/2}) = -10$.

* (sträckan $g<5,\ h=0$): $\nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow (2x+6y, 6x+2y) \parallel (1,0) \Leftrightarrow y=-3x$, som insatt i $h=0$ ger punkten $(-1,3)$, men $g(-1,3) \not< 5$. Ingen kandidat här.

- dim 0 (hörn, $g=5,\ h=0$): Ekvationssystemet $g=5,\ h=0$ ger genast $x^2+y^2=5$ och $x=-1$, alltså kandidaterna $f(-1,2)=-7$ och $f(-1,-2)=17$.

Svar: $f_{\max} = f(\sqrt{5/2}, \sqrt{5/2}) = 20$, $f_{\min} = f(\sqrt{5/2}, -\sqrt{5/2}) = -10$.

5. Variabelbytet $u=y/x$ och $v=xy$ där $x>0$ och $y>0$ är tillåtet, eftersom det är inverterbart där: $x=\sqrt{v/u}$, $y=\sqrt{uv}$. Vidare,

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} -y/x^2 & 1/x \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{2y}{x} = -2u,$$

så $dudv = |-2u|\,dxdy = 2u\,dxdy$. Ny mängd $E:\ 1 \le u \le v \le \sqrt{3}$, en triangel, så

$$\iint_D \frac{y^2}{1+x^2y^2}\,dxdy = \iint_E \frac{uv}{1+v^2}\cdot\frac{dudv}{2u} = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_1^v \frac{v\,du}{1+v^2}\right)\frac{dv}{2}$$
$$= \int_1^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1+v}{1+v^2}\right)\frac{dv}{2} = \left[\frac{v}{2} - \frac{\arctan v}{2} - \frac{\ln(1+v^2)}{4}\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\pi}{24} - \frac{\ln 2}{4}.$$

(Alternativ: Eftersom $(\arctan xy)'_x = y/(1+(xy)^2)$ kan vi också använda upprepad integration, men till priset av besvärligare räkningar.
$\iint_D y^2/(1+(xy)^2)\,dxdy = \int_1^{\sqrt[4]{3}} y[\arctan xy]_{x=1}^{x=y}\,dy + \int_{\sqrt[4]{3}}^{\sqrt{3}} y[\arctan xy]_{x=1}^{x=\sqrt{3}/y}\,dy = \ldots$)

6. Avbildningen är $\mathcal{C}^1$ och avbildar $(x,y)=(1,0)$ på $(u,v)=(1,1)$, och eftersom funktionalmatrisen

$$J = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^y + y/x & xe^y + \ln x \\ 3x^2 & 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

då $(x,y)=(1,0)$, och således har determinant $\neq 0$, ger inversa funktionssatsen en lokal $\mathcal{C}^1$-invers $(x(u,v), y(u,v))$. Vidare, om Γ ges av $(u(t),v(t))$ med $(u(0),v(0))=(1,1)$ och $(u'(0),v'(0))=(2,9)$, så ges C av $(x(t),y(t)) = (x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)))$ där $(x(0),y(0))=(1,0)$ och tangentvektorn i $(1,0)$ är $(x'(0),y'(0))$. Kedjeregeln ger nu sambandet

$$\begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}, \text{ alltså } \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Svar: Tangentvektorn är $(3,-1)$.

7. Ytan kan skrivas som nivåytan $F(x,y,z) = xf(z/x) - y = 0$. Tag nu en godtycklig punkt (a,b,c) på ytan, alltså en punkt som uppfyller $F(a,b,c)=0$. Tangentplanet Π till ytan i (a,b,c) har normalvektor $\nabla F(a,b,c) = (f(c/a) - cf'(c/a)/a, -1, f'(c/a))$, och $\nabla F(a,b,c)\cdot(a-0, b-0, c-0) = af(c/a) - b = F(a,b,c) = 0$, eftersom (a,b,c) ligger på ytan. Alltså ligger $(0,0,0)$ i tangentplanet Π, vilket skulle bevisas.