Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys

2010-06-02 kl 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + y^3$.

2. Beräkna volymen av området som begränsas av ytan $z = x^2 + 2y^2$ och planet $2x - 4y + z = 1$.

3. Bestäm alla plan som tangerar ytan $z = 2 + x^2 + y^2$ och som innehåller punkterna $(0,0,1)$ och $(1,1,3)$.

4. Beräkna $\displaystyle\iiint_D z\,dxdydz$ där
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : (2x+y)^2 + (x-2y)^2 + 4z^2 \leq 1\ ,\ z \geq 0\ ,\ x \leq 2y\}.$$

5. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y,z) = x^2 + yz$ då
$$x^2 + y^2 - 12 \leq z \leq -4$$
om sådana finns.

6. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-lösningar $z(x,y)$ till differentialekvationen
$$xz'_x - yz'_y = z\ ,\ x > 0,\ y > 0$$
t. ex. med hjälp av variabelbytet $u = xy,\ v = x$. Finn speciellt den lösning som uppfyller villkoret $z(x, 1/x^2) = x\,(\ln(x+1) - \ln x)$.

7. Låt $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$. Är $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{1 + (x-y)^4}\,dxdy$ konvergent?

Lösningsskiss till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2010-06-02

1. Stationära punkter fås ur $f'_x = 2x - 2y = 0$, $f'_y = -2x + 4y + 3y^2 = 0$, dvs ur $y = x$, $3y^2 + 2y = 0$, som ger de stationära punkterna $(0,0)$ och $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.
Vidare, $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = -2$ och $f''_{yy} = 4 + 6y$.
I $(0,0)$ får vi $Q(h,k) = 2h^2 - 4hk + 4k^2 = 2(h-k)^2 + 2k^2$, så $Q(h,k) \geq 0$ för alla (h,k) och $Q(h,k) = 0$ om och endast om $(h,k) = (0,0)$. Q är positivt definit och punkten $(0,0)$ är alltså en lokal minimipunkt för f.
I $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ får vi $Q(h,k) = 2h^2 - 4hk = 2(h-k)^2 - 2k^2$, så t.ex. $Q(1,1) < 0$ och $Q(1,0) > 0$. Q är indefinit och punkten $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

   Svar: $(0,0)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

2. Området betecknas med D. Projektionen i xy-planet är $\tilde{D} : (x+1)^2 + 2(y-1)^2 \leq 4$.
Integration i z-led ger $V = \iiint_D 1\, dxdydz = \iint_{\tilde{D}} \left(4 - \left((x+1)^2 + 2(y-1)^2\right)\right) dxdydz$.
Det linjära bytet $u = x + 1$, $v = \sqrt{2}(y-1)$, $E : u^2 + v^2 \leq 4$ följt av polära koordinater ger nu

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\tilde{E}} \left(4 - (u^2 + v^2)\right) dxdy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (4 - \rho^2)\rho \, d\rho \right) d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{(4-\rho^2)^2}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_0^2 = \frac{8\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

3. Sätt $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z + 2$. $\nabla F(x,y,z) = (2x, 2y, -1)$. Tangentplanet i en punkt (a,b,c) på ytan innehåller punkterna $(0,0,1)$ och $(1,1,3)$ precis då $a^2 + b^2 - c + 2 = 0$ och $\nabla F(a,b,c)$ är ortogonal mot $(a-0, b-0, c-1)$ och $(1-0, 1-0, 3-1)$ dvs då $a^2 + b^2 = c - 2$, $2a^2 + 2b^2 = c - 1$ och $2a + 2b = 2$. Vi får $c = 3$ och $a^2 + b^2 = 1$, $a + b = 1$ och detta ger punkterna $(a,b,c) = (0,1,3)$ samt $(a,b,c) = (1,0,3)$ med tillhörande normalvektorer $(0,2,-1)$ respektive $(1,0,2)$. Vi får alltså två plan och deras ekvationer är:

   Svar: $2y - z = -1$, $2x - z = -1$.

4. Vi gör först variabelbytet $u = 2x + y$, $v = x - 2y$, $w = 2z$, där beloppet av relevant funktionaldeterminant är $\frac{1}{10}$. Mängden i nya koordinater är $E : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$. Detta följt av rymdpolära koordinater ger

$$\begin{aligned} \iiint_D z\, dxdydz &= \frac{1}{10} \iiint_E \frac{w}{2}\, dudvdw \\ &= \frac{1}{20} \int_{\pi}^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r\cos\theta\, r^2 \sin\theta\, dr \right) d\theta \right) d\varphi = \frac{\pi}{80} \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{160}. \end{aligned}$$

5. Villkoren $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z - 12 \leq 0$ och $h(x,y,z) = z + 4 \leq 0$ bestämmer en sluten och begränsad mängd och funktionen f är kontinuerlig. Alltså existerar största och minsta värde för f på den mängden.
Vi har $\nabla f = (2x, z, y)$, $\nabla g = (2x, 2y, -1)$ och $\nabla h = (0,0,1)$.

Inre punkter (dim 3), $g<0,\ h<0$: $\nabla f=0$, $(x,y,z)=(0,0,0)$. Tillhör ej mängden.

Randpunkter (dim 2):

(i) $g=0,\ h<0$: $\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow z+2y^2=0$ och $x(y+1)=0$.

(a) $x=0,\ z=-2y^2$ och $x^2+y^2-z=12$ ger punkterna $(0,\pm 2,-8)$. Kandidater: $f(0,\pm 2,-8)=\mp 16$.

(b) $y=-1,\ z=-2y^2$ och $x^2+y^2-z=12$ ger punkterna $(\pm 3,-1,-2)$. Tillhör ej mängden.

(ii) $h=0,\ g<0$: $\nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow z=0$ och $x=0$. Uppfyller ej $h=0$.

Randpunkter (dim 1), $g=0,\ h=0$: $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ är linjärt beroende $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 2x & z & y \\ 2x & 2y & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x(2y-z)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ eller } z=2y.$$

(a) $x=0,\ g=0$ och $h=0$ ger punkterna $(0,\pm 2\sqrt{2},-4)$. Kandidater: $f(0,\pm 2\sqrt{2},-4)=\mp 8\sqrt{2}$.

(b) $z=2y,\ g=0$ och $h=0$ ger punkterna $(\pm 2,-2,-4)$. Kandidater: $f(\pm 2-2,-4)=12$.

Svar: $f_{\max}=f(0,-2,-8)=16$ och $f_{\min}=f(0,2,-8)=-16$.

6. Med variabelbytet $u=xy,\ v=x$ får vi $z'_x=yz'_u+z'_v$ och $z'_y=xz'_u$. Insättning i differentialekvationen ger $vz'_v=z,\ z'_v-\frac{1}{v}z=0$. Detta är en linjär differentialekvation och med $\frac{1}{v}$ som integrerande faktor får vi $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{v}z\right)=0,\ \frac{1}{v}z=\varphi(u),\ z=z(x,y)=x\varphi(xy)$. Här är φ är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Villkoret $z\left(x,\frac{1}{x^2}\right)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ger $x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, dvs $\varphi(t)=\ln(1+t)$. Slutligen $z(x,y)=x\varphi(xy)=x\ln(1+xy)$.

7. Integranden växlar tecken. Sätt

$D^+=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x>0 \text{ och } y>0\}$, $D^+_R=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x>0, y>0 \text{ och } x^2+y^2<R^2\}$

och beteckna integranden med f. Vi noterar att $f(x,y)\ge 0$ för alla $(x,y)\in D^+$ så det räcker att titta på en uttömmande svit. Observera att $|x-y|\le\rho$ för alla $(x,y)\in D^+_R$. Detta ger $f(x,y)\ge\dfrac{\rho\cos\varphi\sin\varphi}{1+\rho^4}$.

$$\iint_{D^+_R} f(x,y)\,dxdy \ge \iint_{D^+_R}\frac{\rho\cos\varphi\sin\varphi}{1+\rho^4}\rho\,d\rho d\varphi=\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\ln(1+\rho^4)}{4}\right]_0^R$$
$$=\frac{1}{8}\ln(1+R^4)\to\infty, R\to\infty$$

Det följer att $\iint_{D^+} f(x,y)\,dxdy$ är divergent och därmed är också $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ divergent.

Anm: Man kan också visa att $\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$ är divergent.

Svar: Integralen är divergent.