Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys

2010–04–09 kl 14–19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Beräkna $\iiint_D yz\,dxdydz$ där $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2 \le z \le 1\ ,\ x+y \ge 0\}$.

2. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till $f(x,y) = (x^2-2y^2)e^{x+y}$.

3. Bestäm alla plan som tangerar ytan $x^2+y^2 = 3z$ och är parallella med planet $z = 1+4x+4y$.

4. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-lösningar $u(x,y,z)$ till differentialekvationssystemet
$$\begin{cases} u'_x = yz\,e^{z^2} - y^2 - z \\ u'_y = xz\,e^{z^2} - 2xy + z^2 - 1 \\ u'_z = xy(1+2z^2)e^{z^2} - x + 2yz + \cos z \end{cases}$$
med villkoret $u(0,0,\pi) = 2$.

5. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y,z) = x$ då
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 & \le & 1 \\ x-y+z & \le & 0 \end{cases}$$
om sådana finns.

6. (a) Definiera vad som menas med att $f(x,y)$ är differentierbar i punkten (a,b).
   (b) Undersök om funktionen
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)^4+x^3+xy^2}{x^2+y^2} & ,\quad (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & ,\quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   är differentierbar i $(0,0)$.

7. Beräkna volymen av kroppen som beskrivs av
$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\ z^2 \le (x+y+z)^2 + |x-2y| \le z\}.$$

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2010-04-09

1. D:s projektion $\tilde{D}$ i xy-planet ges av $x^2+y^2 \le 1$ och $x+y \ge 0$, så med stavar i z-led och i ett senare steg planpolära koordinater får vi

$$\iiint_D yz\,dxdydz = \iint_{\tilde{D}} y \left(\int_{x^2+y^2}^{1} z\,dz \right) dxdy = \iint_{\tilde{D}} y\, \frac{1-(x^2+y^2)^2}{2}\,dxdy$$
$$= \int_0^1 \frac{\rho^2-\rho^6}{2} \left(\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \sin\varphi\,d\varphi \right) d\rho = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{21}.$$

2. Stationära punkter fås ur $f'_x = (2x+x^2-2y^2)e^{x+y} = 0$, $f'_y = (-4y+x^2-2y^2)e^{x+y} = 0$, alltså ur $x^2-2y^2 = 4y$ och $x = -2y$, som ger de stationära punkterna $(0,0)$ och $(-4,2)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = (2+4x+x^2-2y^2)e^{x+y}$, $f''_{xy} = (2x-4y+x^2-2y^2)e^{x+y}$ och $f''_{yy} = (-4-8y+x^2-2y^2)e^{x+y}$.

   I punkten $(0,0)$ blir $f''_{xx} = 2$, $f''_{yy} = 0$ och $f''_{yy} = -4$, och därmed får vi den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 2h^2 - 4k^2,$$

   som är indefinit eftersom t.ex. $Q(1,0) = 2 > 0$ medan $Q(0,1) = -4 < 0$, så punkten $(0,0)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

   I punkten $(-4,2)$ blir $f''_{xx} = -6e^{-2}$, $f''_{xy} = -8e^{-2}$ och $f''_{yy} = -12e^{-2}$, och därmed får vi den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = -e^{-2}(6h^2+16hk+12k^2) = -6e^{-2}\left((h+4k/3)^2 + 2k^2/9\right),$$

   så $Q(h,k) \le 0$ för alla (h,k), och $Q(h,k) = 0$ endast om $h + 4k/3 = 0$ och $k = 0$, d.v.s. endast om $(h,k) = (0,0)$. Q är alltså negativt definit, och punkten $(-4,2)$ är därmed en lokal maximipunkt för f.

   <u>Svar</u>: $(-4,2)$ är en lokal maximipunkt. Lokala minimipunkter saknas.

3. Ytan kan ses som nivåytan $F(x,y,z) = x^2+y^2-3z = 0$. Tangentplanet till ytan i en punkt (a,b,c) på ytan är parallellt med planet $4x+4y-z = -1$ precis då $\nabla F(a,b,c) \parallel (4,4,-1)$ och $F(a,b,c) = 0$, d.v.s. precis då $(2a,2b,-3) \parallel (4,4,-1)$ och $a^2+b^2 = 3c$, alltså precis då $a = b = 6$ och $c = 24$. Vi får därmed den enda tangeringspunkten $(a,b,c) = (6,6,24)$, och tillhörande tangentplans ekvation är $4x+4y-z = 4\cdot 6 + 4\cdot 6 - 24 = 24$.

   <u>Svar</u>: $4x+4y-z = 24$.

4. Integration av ekvation 1 m.a.p. x ger $u = xyz\,e^{z^2} - xy^2 - xz + g(y,z)$, som deriverat m.a.p. y och insatt i ekvation 2 ger $u'_y = xz\,e^{z^2} - 2xy + g'_y(y,z) = xz\,e^{z^2} - 2xy + z^2 - 1$, alltså $g'_y(y,z) = z^2-1$, d.v.s. $g(y,z) = yz^2 - y + h(z)$. Derivering m.a.p. z och insättning i ekvation 3 ger nu $u'_z = xy\,e^{z^2} + 2xyz^2\,e^{z^2} - x + 2yz + h'(z) = xy(1+2z^2)e^{z^2} - x + 2yz + \cos z$, alltså $h'(z) = \cos z$, d.v.s. $h(z) = \sin z + C$. Villkoret $u(0,0,\pi) = 2$ ger slutligen $C = 2$.

   <u>Svar</u>: $u = xyz\,e^{z^2} - xy^2 - xz + yz^2 - y + \sin z + 2$.

5. De två bivillkoren $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \le 1$ och $h(x,y,z) = x - y + z \le 0$ bestämmer ett slutet halvklot – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y,z) = x$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (1,0,0)$, $\nabla g = (2x,2y,2z)$ och $\nabla h = (1,-1,1)$. Kandidatjakt:

   - dim 3 (inre punkter, $g < 1$, $h < 0$): Eftersom $\nabla f \neq \mathbf{0}$ överallt saknas kandidater här.
   - dim 2, består av två delar:
     - (ytan $g = 1$, $h < 0$): $\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow (1,0,0) \parallel (2x,2y,2z) \Leftrightarrow y = z = 0$. Insättning i $g = 1$ och kontroll i $h < 0$ ger kandidaten $f(-1,0,0) = -1$.

- $*$ (ytan $g < 1$, $h = 0$): Eftersom $\nabla f = (1,0,0) \nparallel (1,-1,1) = \nabla h$ överallt finns inga kandidater här.

- dim 1 (kurvan $g = 1$, $h = 0$): $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ är linjärt beroende precis då

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(y+z) \Leftrightarrow z = -y$$

  som insatt i $g = 1$ och $h = 0$ ger $x^2 + 2y^2 = 1$ och $x - 2y = 0$ och därmed kandidaterna $f(2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}) = 2/\sqrt{6}$ och $f(-2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}) = -2/\sqrt{6}$.

- dim 0 (hörn): Tomt.

Svar: $f_{\max} = f(2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}) = 2/\sqrt{6}$ och $f_{\min} = f(-1,0,0) = -1$.

6. (a) $f(x,y)$ sägs vara differentierbar i (a,b) om det finns konstanter A och B och en funktion $R(h,k)$ sådana att

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\, R(h,k)$$

och $R(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$.

(b) Om den givna funktionen är differentierbar i $(0,0)$, så är $A = f'_x(0,0)$ och $B = f'_y(0,0)$. Direkt uträkning ger $f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}(f(h,0) - f(0,0))/h = \lim_{h\to 0}(h^2 + h - 0)/h = 1$ och $f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0}(f(0,k) - f(0,0))/k = \lim_{k\to 0}(k^2 - 0)/k = 0$.

Sätt därför $R(h,k) = (f(h,k) - f(0,0) - Ah - Bk)/\sqrt{h^2+k^2}$ för $(h,k) \neq (0,0)$ med $A = 1$ och $B = 0$; att $f(x,y)$ är differentierbar i $(0,0)$ är nu ekvivalent med att $R(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$. I planpolära koordinater $h = \rho\cos\varphi$, $k = \rho\sin\varphi$ får vi

$$\begin{aligned} R(h,k) &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{(\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^4 + \rho^3\cos\varphi}{\rho^2} - 0 - 1\cdot\rho\cos\varphi - 0\cdot\rho\sin\varphi\right) \\ &= \rho(\cos\varphi - \sin\varphi)^4 \to 0 \quad \text{då } \rho \to 0 \text{ (φ varierar fritt), d.v.s. då } (h,k) \to (0,0), \end{aligned}$$

eftersom $(\cos\varphi - \sin\varphi)^4$ är begränsad. Alltså är $f(x,y)$ differentierbar i $(0,0)$.

Svar: $f(x,y)$ är differentierbar i $(0,0)$.

7. Linjärt variabelbyte:

$$\begin{cases} u = x+y+z, \\ v = x - 2y, \\ w = z \end{cases} \qquad \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad dudvdw = |-3|\, dxdydz = 3\, dxdydz,$$

nytt område $E: w^2 \le u^2 + |v| \le w$. Skivor $E_w : w^2 \le u^2 + |v| \le w$ på fixa w-nivåer där $w^2 \le w$, alltså där $0 \le w \le 1$, ger, tack vare symmetrin i u- och v-led (rita figur!),

$$\text{area}(E_w) = 4\left(\int_0^{\sqrt{w}} (w - u^2)\, du - \int_0^{w} (w^2 - u^2)\, du\right) = \frac{8}{3}(w^{3/2} - w^3)$$

och därmed

$$\text{volym}(D) = \frac{\text{volym}(E)}{3} = \frac{1}{3}\int_0^1 \text{area}(E_w)\, dw = \frac{8}{9}\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{15}.$$