Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys

2010-01-14 kl 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-lösningar $z(x,y)$ till differentialekvationen

$$2x\, z'_x + y\, z'_y = y^2 \quad , \quad x > 0$$

under bivillkoret $z(1,y) = y^2$, t ex med hjälp av variabelbytet $\begin{cases} u = y^2/x \\ v = x. \end{cases}$

2. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till

$$f(x,y,z) = 2z + 2x^2 + y^2 - xy - xz.$$

3. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = xy$ på den del av ellipsskivan $x^2 + xy + y^2 \leq 3$ där $x \leq y$.

4. Beräkna $\displaystyle\iiint_D e^{x+z}\, dxdydz$ där

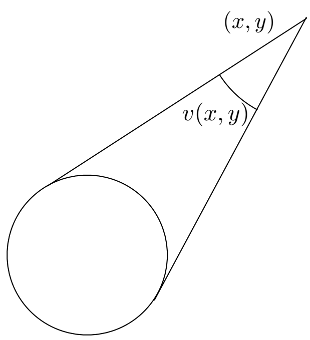
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x + y \leq y + z \leq z + x \leq 1\}.$$

5. Visa att ekvationen $y\cos x + \cos y - \cos x = 0$ i en omgivning av $(0,0)$ entydigt definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y = y(x)$. Undersök om den funktionen har lokalt extremvärde i origo.

6. Låt $v(x,y)$ vara siktvinkeln vid betraktandet av enhetscirkeln från en punkt (x,y) i planet (se figur) och sätt

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}.$$

Undersök om $\displaystyle\iint_D v(x,y)\, dxdy$ är konvergent eller divergent.



7. För vilka värden på $A > 0$ finns det en normallinje till ellipsen $x^2 + Ay^2 = 4$ som går genom $(1,0)$? Vi bortser från x-axeln som trivialt uppfyller villkoren.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2010-01-14

1. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = -(y^2/x^2)z'_u + z'_v$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = (2y/x)z'_u$, så differentialekvationen blir $2xz'_x + yz'_y = 2xz'_v = y^2$, som i halvplanet $x > 0$ kan skrivas $z'_v = y^2/(2x) = u/2$. Integrering ger $z = uv/2 + g(u) = y^2/2 + g(y^2/x)$, och villkoret $z(1, y) = y^2/2 + g(y^2) = y^2$ ger $g(y^2) = y^2/2$, d.v.s. $g(t) = t/2$ för $t \geq 0$, och därmed $z(x, y) = y^2/2 + y^2/(2x)$ för $x > 0$. Svar: $z(x, y) = y^2/2 + y^2/(2x)$.

2. Stationära punkter fås ur ekvationssystemet $f'_x = 4x - y - z = 0$, $f'_y = 2y - x = 0$, $f'_z = 2 - x = 0$, som är ett linjärt ekvationssystem och som har den entydiga lösningen $(x, y, z) = (2, 1, 7)$, som därmed är funktionens enda stationära punkt.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 4$, $f''_{xy} = -1$, $f''_{xz} = -1$, $f''_{yy} = 2$, $f''_{yz} = 0$ och $f''_{zz} = 0$.

   I punkten $(2, 1, 7)$ får vi den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} \\ &= 4h^2 - 2hk - 2hl + 2k^2 = 2(k - h/2)^2 + (7/2)(h - 2l/7)^2 - (2/7)l^2, \end{aligned}$$

   som är indefinit eftersom t.ex. $Q(1, 0, 0) = 4 > 0$ medan $Q(2, 1, 7) = -14 < 0$, så punkten $(2, 1, 7)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

   Svar: f saknar lokala maximi- och minimipunkter.

3. De två bivillkoren $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 \leq 3$ och $h(x, y) = x - y \leq 0$ bestämmer en sluten delmängd av en ellipsskiva – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x, y) = xy$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (y, x)$, $\nabla g = (2x + y, x + 2y)$ och $\nabla h = (1, -1)$. Kandidatjakt:

   - dim 2 (inre punkter, $g < 3$, $h < 0$): $\nabla f = \mathbf{0} \Leftrightarrow (y, x) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$, men $h(0, 0) = 0 \not< 0$. Ingen kandidat här.
   - dim 1, består av två delar:
     * (ellipskurvan $g = 3$, $h < 0$):

$$\nabla f \parallel \nabla g \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x + y & x + 2y \end{vmatrix} = 2y^2 - 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm x.$$

       Fallet $y = x$ går bort, eftersom $h(x, x) = 0 \not< 0$. Fallet $y = -x$ insatt i $g = 3$ ger $x^2 = 3$, och kandidaten $f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = -3$ (den andra punkten man får, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, uppfyller ej kravet $h < 0$).
     * (sträckan $g < 3$, $h = 0$) $\nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow (y, x) \parallel (1, -1) \Leftrightarrow y = -x$, som insatt i $h = 0$ och kontrollerad mot $g < 3$ ger kandidaten $f(0, 0) = 0$.
   - dim 0 (hörn, $g = 3$, $h = 0$): Ekvationssystemet $g = 3$, $h = 0$ ger genast $3x^2 = 3$ och $y = x$, alltså kandidaterna $f(1, 1) = 1$ och $f(-1, -1) = 1$.

   Svar: $f_{\max} = f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$, $f_{\min} = f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = -3$.

4. Linjärt variabelbyte:

$$\begin{cases} u = x+y, \\ v = y+z, \\ w = z+x, \end{cases} \qquad \frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad dudvdw = |2|\,dxdydz = 2\,dxdydz,$$

nytt område $E : 0 \leq u \leq v \leq w \leq 1$. Skivor $E_w : 0 \leq u \leq v \leq w$ på fixa w-nivåer, $0 \leq w \leq 1$, ger, så småningom med partiell integration,

$$\iiint_D e^{x+z} dxdydz = \iiint_E e^w \frac{dudvdw}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 e^w \left(\iint_{E_w} dudv\right) dw$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^w \operatorname{area}(E_w)\,dw = \frac{1}{4}\int_0^1 e^w w^2\,dw = \frac{1}{4}[e^w(w^2-2w+2)]_0^1 = \frac{e-2}{4}.$$

(Alternativ: stavar t.ex. i w-led går bra: $\iiint_E e^w\,dudvdw = \int_0^1(\int_u^1(\int_v^1 e^w\,dw)dv)du = \ldots$)

5. Sätt $F(x,y) = y\cos x + \cos y - \cos x$; vår ekvation kan då skrivas $F(x,y) = 0$. Eftersom $F \in \mathcal{C}^1$, $F(0,0) = 0$ och $\nabla F = ((1-y)\sin x, \cos x - \sin y) = (0,1)$ i punkten $(0,0)$, och alltså har y-koordinat $\neq 0$ där, följer från implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x,y) = 0$ i någon omgivning till $(x,y) = (0,0)$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y(x)$.

Att $y(0) = 0$ medför att $y(x)$ ligger nära 0 då x ligger nära 0, och eftersom implicit derivering ger

$$y'(x) = \frac{(y(x)-1)\sin x}{\cos x - \sin y(x)}$$

följer det att $y'(x)$ i någon omgivning till $x = 0$ uppvisar teckenväxlingen $+0-$, och därmed att $y(x)$ har lokalt maximum i origo.

6. Enkel geometri ger $v(x,y) = 2\arcsin(1/\rho)$, där som vanligt $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, så planpolära koordinater ger ny mängd $E : \rho > 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $dxdy = \rho\,d\rho d\varphi$, varför

$$\iint_D v(x,y)\,dxdy = 4\pi\int_1^\infty \arcsin(1/\rho)\,\rho\,d\rho,$$

eftersom integranden $v(x,y)$ i denna generaliserade integral är positiv. Här ser vi att

$$\arcsin(1/\rho)\,\rho = \frac{\arcsin(1/\rho)}{1/\rho} > \frac{1}{2}, \qquad \text{alla } \rho > \text{något } R,$$

ty $(\arcsin t)/t \to 1$ då $t \to 0$. Eftersom $\int_R^\infty (1/2)\,d\rho$ är divergent följer nu att vår givna integral också är divergent, enligt jämförelsekriteriet för positiva integraler.

7. Ellipsen kan ses som nivåkurvan $F(x,y) = x^2 + Ay^2 = 4$, där $A > 0$ är en parameter. En normal till ellipsen i en punkt (a,b) på ellipsen går även genom $(1,0)$ precis då $\nabla F(a,b) \parallel (a-1, b-0)$ och $F(a,b) = 4$, d.v.s. precis då $(A + a - Aa)b = 0$ och $a^2 + Ab^2 = 4$. När vi bortser från det triviala fallet $b = 0$, som ger $(a,b) = (\pm 2, 0)$, återstår alltså fallet $b \neq 0$. Att $A + a - Aa = 0$ utesluter möjligheten $A = 1$ (som svarar mot cirkeln $x^2 + y^2 = 4$), och vi får $a = A/(A-1)$, som insatt i $F(a,b) = 4$ ger

$$b^2 = \frac{1}{A}\left(4 - (\frac{A}{A-1})^2\right) = \frac{(3A-2)(A-2)}{A(A-1)^2}, \quad A > 0,\ A \neq 1.$$

Något $b \neq 0$ som uppfyller denna ekvation finns alltså precis då det rationella uttrycket i parametern A är > 0, vilket inträffar precis då $0 < A < 2/3$ eller $A > 2$.