Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys

2009-12-22 kl 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Beräkna volymen av den mängd som ges av olikheterna $x^2 + y^2 \leq z \leq 15 - 2x$.

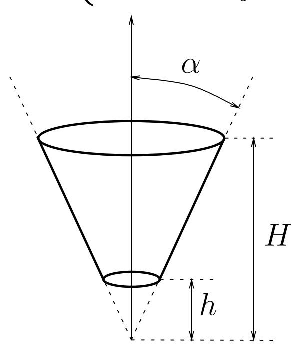
2. Kurvan $\Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t/\pi \end{cases}$ skär ytan som ges av $z = 3 - x^2 - y^2$ i punkten P. Bestäm ytans tangentplan och kurvans tangentlinje i punkten P.

3. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter till $f(x, y) = x^2 + 6y^2 + 6xy + y^3$.

4. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y, z) = x + y + z$ på den mängd där
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

5. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-lösningar $z = z(x, y)$ till differentialekvationen
$$z''_{xx} - z''_{xy} - 2z''_{yy} = 3x$$
exempelvis genom att göra ett linjärt byte av formen $\begin{cases} u = x + ay \\ v = bx + y. \end{cases}$

6. Betrakta den stympade cirkulära konen K i figuren. Beräkna tyngdpunktens z-koordinat
$$z_T = \frac{\iiint_K z\,dxdydz}{\iiint_K 1\,dxdydz}.$$
Beräkna också $\lim_{h \to 0} z_T$.



7. Visa att ekvationen $e^z + (x^2 + y^2)z = 2$ definierar en funktion $z = f(x, y) > 0$ för alla reella x och y och att $f(x, y) \to 0$ då $x^2 + y^2 \to \infty$. Visa att kring varje punkt i planet finns en omgivning där f är kontinuerligt deriverbar och undersök om $\iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\,dxdy$ är konvergent eller divergent.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2009-12-22

1. Mängdens projektion $\tilde{D}$ i xy-planet ges av $x^2 + y^2 \leq 15 - 2x$, d.v.s. $(x+1)^2 + y^2 \leq 16$, så med stavar i z-led får vi, med linjärt byte $u = x+1$, $v = y$ och ny mängd $E: u^2 + v^2 \leq 16$ och $dudv = dxdy$, följt av planpolärt byte $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$ med ny mängd $F: 0 \leq \rho \leq 4,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $dudv = \rho\, d\rho d\varphi$,

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\tilde{D}} (15 - 2x - x^2 - y^2)\, dxdy = \iint_{\tilde{D}} (16 - (x+1)^2 - y^2)\, dxdy \\ &= \iint_E (16 - u^2 - v^2)\, dudv = \int_0^4 \left(\int_0^{2\pi} (16 - \rho^2)\rho\, d\varphi \right) d\rho = 2\pi \left[8\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^4 = 128\pi. \end{aligned}$$

2. Skärningen ges av $t/\pi = 3 - \cos^2 t - \sin^2 t = 2$, d.v.s. $t = 2\pi$, som svarar mot $P = (1, 0, 2)$. Ytan kan ses som nivåytan $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z = 3$, och en normalvektor till ytan ges av $\nabla F = (2x, 2y, 1) = (2, 0, 1)$ i P, så tangentplanets ekvation är $2(x-1) + (z-2) = 0$, d.v.s. $2x + z = 4$. En tangentvektor till kurvan är $(-\sin t, \cos t, 1/\pi) = (0, 1, 1/\pi)$ i P, så tangentlinjens ekvation kan skrivas $(x, y, z) = (1, t, 2 + t/\pi)$, $t \in \mathbf{R}$.

   Svar: $2x + z = 4$ respektive $(x, y, z) = (1, t, 2 + t/\pi)$.

3. $f(x,y) = x^2 + 6y^2 + 6xy + y^3$. Stationära punkter fås ur ekvationssystemet $f'_x = 2x + 6y = 0$, $f'_y = 12y + 6x + 3y^2 = 0$. Den första ekvationen ger $x = -3y$ som insatt i den andra ger $3y^2 - 6y = 0$, d.v.s. $y = 0$ eller $y = 2$. De stationära punkterna är således $(0,0)$ och $(-6, 2)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 6$ och $f''_{yy} = 12 + 6y$.

   I punkten $(0,0)$ blir $f''_{yy} = 12$, och därmed får vi den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q(h,k) &= \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= 2h^2 + 12hk + 12k^2 = 2\left((h+3k)^2 - 3k^2\right), \end{aligned}$$

   som är indefinit eftersom t.ex. $Q(1,0) = 2 > 0$ medan $Q(3,-1) = -6 < 0$, så punkten $(0,0)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

   I punkten $(-6,2)$ blir $f''_{yy} = 24$, och därmed får vi den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = 2h^2 + 12hk + 24k^2 = 2\left((h+3k)^2 + 3k^2\right),$$

   så $Q(h,k) \geq 0$ för alla (h,k), och $Q(h,k) = 0$ endast om $h + 3k = 0$ och $k = 0$, d.v.s. endast om $(h,k) = (0,0)$. Q är alltså positivt definit, och punkten $(-6,2)$ är därmed en lokal minimipunkt för f.

   Svar: $(-6,2)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

4. De två bivillkoren $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och $h(x,y,z) = 2xy = 1$ bestämmer en sluten delmängd av enhetsklotet – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y,z) = x + y + z$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (1,1,1)$, $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ och $\nabla h = (2y, 2x, 0)$. Kandidatjakt:

   - dim 3 (inre punkter): Tomt.
   - dim 2 (ytan $g < 1$, $h = 1$): $\nabla f \parallel \nabla h \Leftrightarrow (1,1,1) \parallel (2y, 2x, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$, men då blir $2xy = 0 \neq 1$. Ingen kandidat här.
   - dim 1 (kurvan $g = 1$, $h = 1$): $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ är linjärt beroende precis då

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 2y & 2x & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y-x & z \\ y & x-y & 0 \end{vmatrix} = 4(x-y) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & -1 & z \\ y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4(x-y)(x+y-z).$$

     Fallet $y = x$ insatt i $g = 1$ och $h = 1$ ger $2x^2 + z^2 = 1$ och $2x^2 = 1$ och därmed kandidaterna $f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}$ och $f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) = -\sqrt{2}$. Fallet $z = x + y$ ger analogt $2x^2 + 2y^2 + 2xy = 1$ och $2xy = 1$, som saknar lösning.

- dim 0 (hörn): Tomt.

Svar: $f_{\max} = f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}$ och $f_{\min} = f(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) = -\sqrt{2}$.

5. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + bz'_v$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = az'_u + z'_v$. Vidare,

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= (z'_x)'_x = (z'_u + bz'_v)'_x = (z'_u + bz'_v)'_u + b(z'_u + bz'_v)'_v = z''_{uu} + 2bz''_{uv} + b^2 z''_{vv}, \\ z''_{xy} &= (z'_x)'_y = (z'_u + bz'_v)'_y = a(z'_u + bz'_v)'_u + (z'_u + bz'_v)'_v = az''_{uu} + (ab+1)z''_{uv} + bz''_{vv}, \\ z''_{yy} &= (z'_y)'_y = (az'_u + z'_v)'_y = a(az'_u + z'_v)'_u + (az'_u + z'_v)'_v = a^2 z''_{uu} + 2az''_{uv} + z''_{vv}, \end{aligned}$$

så

$$z''_{xx} - z''_{xy} - 2z''_{yy} = (1 - a - 2a^2)z''_{uu} + (2b - ab - 1 - 4a)z''_{uv} + (b^2 - b - 2)z''_{vv}.$$

Väljer vi nu a och b så att $1 - a - 2a^2 = 0$ och $b^2 - b - 2 = 0$ och så att $u = x + ay$, $v = bx + y$ blir en inverterbar linjär avbildning, t.ex. så att $a = -1$ och $b = 2$ (eller $a = 1/2$ och $b = -1$, dock inte $a = -1$ och $b = -1$ eller $a = 1/2$ och $b = 2$), blir endast z''_{uv}-termen kvar. Sätt alltså $u = x - y$ och $v = 2x + y$. Vår differentialekvation blir då $9z''_{uv} = 3x = u + v$, alltså $z''_{uv} = (u + v)/9$, och integrering ger $z'_u = (2uv + v^2)/18 + g(u)$ och $z = (u^2 v + uv^2)/18 + G(u) + H(v) = (x - y)(2x + y)x/6 + G(x - y) + H(2x + y)$, där G och H är $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel.

Svar: $z(x, y) = (x - y)(2x + y)x/6 + G(x - y) + H(2x + y)$, där $G, H \in \mathcal{C}^2$.

6. Tvärsnittsarean $A(z)$ på höjden z över spetsen är $A(z) = \pi(z \tan\alpha)^2$, så skivor på fixa z-nivåer ger

$$\iiint_K 1\, dxdydz = \int_h^H A(z)\, dz = \frac{H^3 - h^3}{3}\pi \tan^2 \alpha$$

och

$$\iiint_K z\, dxdydz = \int_h^H zA(z)\, dz = \frac{H^4 - h^4}{4}\pi \tan^2 \alpha,$$

så $z_T = 3(H^4 - h^4)/(4(H^3 - h^3))$ och $z_T \to 3H/4$ då $h \to 0$.

Svar:

$$z_T = \frac{3}{4} \cdot \frac{H^4 - h^4}{H^3 - h^3}, \quad z_T \to \frac{3H}{4} \text{ då } h \to 0.$$

7. Fixera $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ och studera funktionen $g(z) = e^z + (x^2 + y^2)z$ för $z \in \mathbf{R}$. Eftersom $g'(z) = e^z + (x^2 + y^2) > 0$ för alla z är g strängt växande, och eftersom dessutom $g(0) = 1$ och $g(z) \to \infty$ då $z \to \infty$ inser vi att ekvationen $g(z) = 2$ har precis en lösning $z = f(x, y) > 0$.

Vidare, implicita funktionssatsen tillämpad på $F(x, y, z) = e^z + (x^2 + y^2)z = 2$ i en punkt (a, b, c) med $c = f(a, b)$ ger, eftersom $F(a, b, c) = 2$, $F \in \mathcal{C}^1$ och $F'_z(a, b, c) = e^c + (a^2 + b^2) \neq 0$, att ekvationen $F(x, y, z) = 2$ i någon omgivning till (a, b, c) definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $z(x, y)$, och entydigheten som visades i första stycket medför att denna funktion är just $f(x, y)$, som därmed är $\mathcal{C}^1$.

Avslutningsvis, eftersom $f(x, y) > 0$ följer det att $0 \leq (x^2 + y^2)f(x, y) = 2 - e^{f(x,y)} \leq 1$, och därmed att $f(x, y) \to 0$ då $x^2 + y^2 \to \infty$. Tag därför R så stort att $0 < f(x, y) < \ln(3/2)$ då $(x, y) \in D_R$, där D_R är den mängd där $x^2 + y^2 > R^2$. Då får vi

$$f(x, y) = \frac{2 - e^{f(x,y)}}{x^2 + y^2} > \frac{1/2}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in D_R,$$

och eftersom

$$\iint_{D_R} \frac{1/2}{x^2 + y^2}\, dxdy = \pi \int_R^\infty \frac{d\rho}{\rho}$$

är divergent inser vi att även $\iint_{D_R} f(x, y)\, dxdy$ är divergent; således är $\iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\, dxdy$ divergent.