Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

**Kurskod: TATA43**
**Provkod: TEN1**

# Tentamen i Flervariabelanalys

**2009-08-15 kl 14–19**

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-lösningar $z(x, y)$ till differentialekvationen
$$x\, z'_x + y\, z'_y = 2xy\, e^{-x/y} \quad , \quad x > 0\,,\ y > 0$$
under bivillkoret $z(x, x^2) = 0$, t ex med hjälp av variabelbytet $\begin{cases} u = xy \\ v = x/y. \end{cases}$

2. Beräkna $\iiint_D xz\, dxdydz$ där $D$ ges av olikheterna $x \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+4z^2 \leq 4.$

3. Visa att ekvationen
$$x\, e^{xz} + xy^3 = z + yz^2$$
i en omgivning av punkten $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ entydigt definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $x = x(y, z)$. Beräkna även $x'_y(1, 0)$ och $x'_z(1, 0)$ och bestäm ekvationen för det plan som tangerar ytan i punkten $(x, y, z) = (0, 1, 0)$.

4. Bestäm största och minsta värde, om sådana finns, av $f(x, y, z) = x+y+z$ på den mängd där $x^2 + y^2 \leq z \leq 2y - x - 1$.

5. Undersök följande gränsvärden.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2}$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 - x^3}{x^2 + 3y^2}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2 + 3\ln(1 + xyz)}$

6. Beräkna $\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dxdy}{1 + (x^2 + 4xy + 6y^2)^2}.$

7. Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x, y) = x^2 - 2|x| - 2xy^2$.

**Lösningsskiss till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2009-08-15**

1. Variabelbytet $u = xy$, $v = x/y$ ger $z'_x = yz'_u + \dfrac{1}{y}z'_v$ och $z'_y = xz'_u - \dfrac{x}{y^2}z'_v$. Insättning i differentialekvationen ger $z'_u = e^{-v}$, $z = ue^{-v} + g(v)$, där $g$ är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. Vi får $z(x,y) = xye^{-x/y} + g(x/y)$. Bivillkoret ger
$$0 = z(x,x^2) = x^3e^{-1/x} + g(1/x), \text{ dvs } g(t) = -\frac{1}{t^3}e^{-t} \text{ och } g(x/y) = -\frac{y^3}{x^3}e^{-x/y}.$$
Slutligen $z(x,y) = xye^{-x/y} - \dfrac{y^3}{x^3}e^{-x/y}$.

2. Det linjära bytet $u = x, v = y, w = 2z$ ger en ny mängd $E : u^2+v^2+w^2 \leq 4,\ u \geq 0,\ w \geq 0$ och $\left|\dfrac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}\right| = \dfrac{1}{2}$, följt av byte till rymdpolära koordinater ger
$$\begin{aligned}\iiint_D xz\,dxdydz &= \iiint_E \frac{uw}{2}\frac{dudvdw}{2} \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^2 r\sin\theta\cos\varphi\, r\cos\theta\, r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta\right)d\varphi \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^2\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2}[\sin\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

3. Sätt $F(x,y,z) = xe^{xz} + xy^3 - z - yz^2$. Det följer att $F \in \mathcal{C}^1$, $F(0,1,0) = 0$ och $F'_x = e^{xz} + xze^{xz} + y^3 = 2 \neq 0$ i $(0,1,0)$. Implicita funktionssatsen ger nu att sambandet $F = 0$ i en omgivning av punkten $(0,1,0)$ definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $x = x(y,z)$. Vi deriverar $F = 0$ implicit m.a.p. $y$ och får $x'_ye^{xz} + xe^{xz}x'_yz + x'_yy^3 + 3xy^2 - z^2 = 0$ dvs $2x'_y = 0$ i $(0,1,0)$. Nu m.a.p. $z$: $x'_ze^{xz} + xe^{xz}(x'_zz + x) + x'_zy^3 - 1 - 2yz = 0$ dvs $2x'_z - 1 = 0$ i $(0,1,0)$. $\nabla F(0,1,0) = (2,0,-1)$ och tangentplanets ekvation är $2x - z = 0$ ty punkten $(0,1,0)$ tillhör tangentplanet.

   Svar: $x'_y(1,0) = 0$, $x'_z(1,0) = \dfrac{1}{2}$ och $2x - z = 0$.

4. Bivillkoren $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z \leq 0$ och $h(x,y,z) = x - 2y + z + 1 \leq 0$ bestämmer en sluten och begränsad mängd och funktionen $f(x,y,z) = x + y + z$ är kontinuerlig. Alltså existerar största och minsta värde för $f$ på den mängden.
   Vi har $\nabla f = (1,1,1)$, $\nabla g = (2x,2y,-1)$ och $\nabla h = (1,-2,1)$.

   Inre punkter(dim 3): $\nabla f \neq \mathbf{0}$ överallt. Kandidater saknas.

   Randpunkter (dim 2):

   (i) $g = 0,\ h < 0$. $\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow \nabla f \times \nabla g = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = y = -1/2$ som insatt i $g = 0$ ger $z = 1/2$. Punkten $(-1/2,-1/2,1/2)$ uppfyller inte villkoret $h < 0$.

   (ii) $g < 0,\ h = 0$. $\nabla f \nparallel \nabla h$. Kandidater saknas.

   Randpunkter (dim 1): Kurvan $g = 0,\ h = 0$. $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ är linjärt beroende $\Leftrightarrow$
   $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$ som insatt i $g = 0$, $h = 0$ ger $y = 1/2, z = 1/2$ eller $y = 3/2, z = 5/2$. Kandidater: $f(-1/2,1/2,1/2) = 1/2$ och $f(-1/2,3/2,5/2) = 7/2$.

   Svar: $f_{\min} = f(-1/2,1/2,1/2) = 1/2$, $f_{\max} = f(-1/2,3/2,5/2) = 7/2$.

5. (a) Sätt $f(x,y) = \dfrac{xy+y^3}{x^2+y^2}$.
$y=0,\ x \neq 0: f(x,y) = 0 \to 0,\ x \to 0$.
$y = x \neq 0: f(x,y) = \dfrac{x^2+x^3}{2x^2} = \dfrac{1+x}{2} \to \dfrac{1}{2},\ x \to 0$. Gränsvärdet existerar ej.

(b) Sätt $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Observera att $|x| \leq \rho,\ |y| \leq \rho$.
$$\left|\frac{y^3-x^3}{x^2+3y^2} - 0\right| \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{2\rho^3}{\rho^2} = 2\rho \to 0,\ \rho \to 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3-x^3}{x^2+3y^2} = 0.$$

(c) Sätt $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. $\dfrac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+3\ln(1+xyz)} = \dfrac{\sin r^2}{r^2}\dfrac{1}{1+\frac{3\ln(1+xyz)}{r^2}}$.
Observera att det finns en konstant $K > 0$ sådan att $|\mathcal{O}(xyz)| \leq K|xyz|$ i en omgivning av origo. Nu följer att $\left|\dfrac{3\ln(1+xyz)}{r^2}\right| = \left|\dfrac{\mathcal{O}(xyz)}{r^2}\right| \leq \dfrac{K|xyz|}{r^2} \leq Kr \to 0,\ r \to 0$.
Detta ger $\displaystyle\lim_{(x,y,z,)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2+3\ln(1+xyz)} = 1 \cdot \frac{1}{1+0} = 1$.

6. Integralen är generaliserad. Eftersom integranden är positiv kan vi räkna som vanligt med itererad integration och även göra variabelbyten.
Kvadratkomplettering ger $x^2+4xy+6y^2 = (x+2y)^2+(\sqrt{2}y)^2$. Ett naturligt variabelbyte är $u = x+2y, v = \sqrt{2}y$. Vi får $\left|\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Variabelbytet ger en en-entydig avbildning, så området i $uv$-planet blir hela $\mathbf{R^2}$. Gör vi sedan ett polärt byte får vi
$$\iint_{\mathbf{R^2}} \frac{1}{1+(x^2+4xy+6y^2)^2}\,dxdy = \iint_{\mathbf{R^2}} \frac{1}{1+(u^2+v^2)^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\,dudv$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\rho}{1+\rho^4}\,d\rho = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\arctan\rho^2\right]_0^\infty = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}.$$

7. Vi betraktar tre fall: $x > 0, x < 0$ och $x = 0$.

(a) $x > 0$: $f(x,y) = x^2-2x-2xy^2$. $f'_x = 2x-2-2y^2 = 0, f'_y = -4xy = 0$ ger en stationär punkt $(1,0)$. $f''_{xx} = 2, f''_{xy} = -4y, f''_{yy} = -4x$ ger $Q = 2h^2-4k^2$ som är indefinit ty t.ex. $Q(1,0) > 0$ och $Q(0,1) < 0$. Punkten $(1,0)$ är ej en lokal extrempunkt.

(b) $x < 0$: $f(x,y) = x^2+2x-2xy^2$. På samma sätt som ovan fås en stationär punkt $(-1,0)$ och $Q = 2h^2+4k^2$ som är positivt definit ty $Q(h,k) \geq 0$ och $Q = 0 \Leftrightarrow (h,k) = (0,0)$. Punkten $(-1,0)$ är en lokal minimipunkt.

(c) $x = 0$: $f(0,y) = 0$ för alla $y \in \mathbf{R}$. Om $0 < x < 2$ gäller $f(x,y) = x(x-2-2y^2) < 0$ för alla $y \in \mathbf{R}$. När vi tittar på $f$:s värden i vänster halvplan, $x < 0$, behöver vi dela upp i tre fall. Betrakta punkten $(0,b), b \in \mathbf{R}$. Vi skall avgöra vilket tecken $f$ har i en tillräckligt liten omgivning av $(0,b)$. Observera att $x < 0$.

i. $|b| > 1$: $f(x,y) = x(x+2-2y^2) > 0$ i en tillräckligt liten omgivning av $(0,b)$. Det följer att $(0,b)$ inte är en lokal extrempunkt.

ii. $|b| = 1$: $f(x,b) = x^2 > 0$. Det följer att ingen av punkterna $(0,\pm 1)$ är lokal extrempunkt.

iii. $|b| < 1$; $f(x,y) = x(x+2-2y^2) < 0$ i en tillräckligt liten omgivning av $(0,b)$. Det följer att $(0,b)$ är en lokal maximipunkt.

Svar: $(-1,0)$ är en lokal minimipunkt. Punkterna $(0,b), |b| < 1$ är lokala maximipunkter.