Linköpings universitet
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod: TATA43
Provkod: TEN1

Tentamen i Flervariabelanalys

2009–06–05 kl 8–13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Beräkna $\displaystyle\iint_D \frac{x-y+1}{x+y}\,dxdy$ där D ges av olikheterna $1 \le x+y \le 2x-4y \le 3$.

2. Bestäm största och minsta värde, om sådana finns, av $f(x,y) = xy$ på ellipsbågen
$$\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 16 \\ \qquad\qquad x + y \ge 2. \end{cases}$$

3. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-lösningar $u(x,y,z)$ till differentialekvationssystemet
$$\begin{cases} u'_x = z\,e^{x+2y} - y \\ u'_y = 2z\,e^{x+2y} + 2yz - x \\ u'_z = e^{x+2y} + y^2 - 1 \end{cases}$$
med villkoret $u(0,0,0) = 3$.

4. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för $f(x,y,z) = 2y^2 + z^2 - 2yz + 2xy + \dfrac{2}{3}x^3$.

5. Beräkna $\displaystyle\iiint_D e^z\,dxdydz$ där $D = \left\{x^2 + y^2 \le 3z^2 \le 12 - 3x^2 - 3y^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \le 0\right\}$.

6. Betrakta alla linjer som är normallinjer till ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 3$ och som går genom punkten $(x,y,z) = (1,0,0)$. Under vilka vinklar skär dessa linjer ellipsoiden?

7. Låt $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x+n)^5}$, $x \ge 0$. Bestäm, om möjligt, något tal C sådant att $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx \le C$.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43 Flervariabelanalys 2009-06-05

1. Linjärt byte $u = x + y$, $v = 2x - 4y$ ger ny mängd $E : 1 \le u \le v \le 3$ och

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -6, \text{ så } dudv = \left|\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right| dxdy = 6\,dxdy.$$

Vi får

$$\iint_D \frac{x-y+1}{x+y}\,dxdy = \iint_E \frac{(u+v)/3+1}{u}\,\frac{dudv}{6} = \frac{1}{18}\int_1^3 \left(\int_u^3 (u+v+3)\,dv\right)\frac{du}{u}$$
$$= \frac{1}{18}\int_1^3 \left(\frac{27}{2u} - \frac{3u}{2}\right) du = \frac{1}{18}\left(\frac{27}{2}\ln 3 - 6\right) = \frac{3\ln 3}{4} - \frac{1}{3}.$$

2. De två bivillkoren $g(x,y) = 5x^2-6xy+5y^2 = 16$ och $h(x,y) = x+y \ge 2$ bestämmer en sluten ellipsbåge – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y) = xy$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

Vi får $\nabla f = (y,x)$ och $\nabla g = (10x - 6y, 10y - 6x)$. Kandidatjakt:

- dim 2 (inre punkter): tomt.
- dim 1 (kurva, $g = 16$, $h > 2$): $\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} y & x \\ 10x-6y & 10y-6x \end{vmatrix} = 10y^2 - 10x^2 \Leftrightarrow$ $y = \pm x$. Fallet $y = x$ insatt i $g = 16$ ger kandidaten $f(2,2) = 4$ (den andra punkten man får, $(-2,-2)$, uppfyller ej villkoret $h > 2$); fallet $y = -x$ ger $x + y = 0$, vilket strider mot att $h(x,y) = x + y > 2$.
- dim 0 (hörn, $g = 16$, $h = 2$): Lösning av ekvationssystemet $g = 16$, $h = 2$ ger genast kandidaterna $f(1+\sqrt{3}/2, 1-\sqrt{3}/2) = f(1-\sqrt{3}/2, 1+\sqrt{3}/2) = 1/4$.

Svar: $f_{\max} = f(2,2) = 4$ och $f_{\min} = f(1+\sqrt{3}/2, 1-\sqrt{3}/2) = f(1-\sqrt{3}/2, 1+\sqrt{3}/2) = 1/4$.

3. Integration av ekvation 3 ger $u(x,y,z) = z\,e^{x+2y} + y^2z - z + g(x,y)$, och derivering av u m.a.p. y och insättning i ekvation 2 ger sedan $g'_y(x,y) = -x$, så $g(x,y) = -xy + h(x)$. Vidare, derivering av $u(x,y,z) = z\,e^{x+2y} + y^2z - z - xy + h(x)$ m.a.p. x och insättning i ekvation 1 ger $h'(x) = 0$, så $h(x) = C$. Bivillkoret $f(0,0,0) = 3$ ger slutligen $C = 3$.

Svar: $u(x,y,z) = z\,e^{x+2y} + y^2z - xy - z + 3$.

4. $f(x,y,z) = 2y^2 + z^2 - 2yz + 2xy + 2x^3/3$. Stationära punkter fås ur ekvationssystemet $f'_x = 2y + 2x^2 = 0$, $f'_y = 4y - 2z + 2x = 0$, $f'_z = 2z - 2y = 0$. Den tredje ekvationen ger $z = y$, som insatt i den andra ger $y = -x$, som i sin tur insatt i den första ger $x^2 - x = 0$, alltså $x = 0$ eller $x = 1$. De stationära punkterna är således $(0,0,0)$ och $(1,-1,-1)$.

Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 4x$, $f''_{xy} = 2$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yy} = 4$, $f''_{yz} = -2$ och $f''_{zz} = 2$.

I punkten $(0,0,0)$ blir $f''_{xx} = 0$, och därmed får vi den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$$
$$= 4k^2 + 2l^2 + 4hk - 4kl = 2\left((l-k)^2 + (k+h)^2 - h^2\right),$$

som är indefinit eftersom t.ex. $Q(0,0,1) = 2 > 0$ medan $Q(-1,1,1) = -2 < 0$, så punkten $(0,0,0)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

I punkten $(1,-1,-1)$ blir $f''_{xx} = 4$, och därmed får vi den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = 4h^2 + 4k^2 + 2l^2 + 4hk - 4kl = 2\left((l-k)^2 + (k+h)^2 + h^2\right),$$

så $Q(h,k,l) \ge 0$ för alla (h,k,l), och $Q(h,k,l) = 0$ endast om $l - k = 0$, $k + h = 0$ och $h = 0$, d.v.s. endast om $(h,k,l) = (0,0,0)$. Q är alltså positivt definit, och punkten $(1,-1,-1)$ är därmed en lokal minimipunkt för f.

Svar: $(1,-1,-1)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

5. Området D kan skrivas $x^2+y^2 \le 3z^2$, $x^2+y^2+z^2 \le 4$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \le 0$. Rymdpolärt byte $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ ger nytt område E som bestäms av olikheterna $0 \le r \le 2$, $2\pi/3 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le \pi/2$. Vidare, $dxdydz = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$, så

$$\iiint_D e^z\, dxdydz = \iiint_E e^{r\cos\theta} r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi = \int_0^2 \left(\int_{2\pi/3}^{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} e^{r\cos\theta} r^2 \sin\theta\, d\varphi \right) d\theta \right) dr$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^2 \left[-re^{r\cos\theta} \right]_{\theta=2\pi/3}^{\theta=\pi} dr = \frac{\pi}{2} \int_0^2 r(e^{-r/2} - e^{-r})\, dr$$
$$= \frac{\pi}{2} \left[r(e^{-r} - 2e^{-r/2}) + e^{-r} - 4e^{-r/2} \right]_0^2 = \frac{\pi}{2} \left(3 - \frac{8}{e} + \frac{3}{e^2} \right).$$

6. Ellipsoiden, som vi kallar E, kan skrivas som nivåytan $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 3$. Normallinjen till E i en punkt (a,b,c) går även genom $(1,0,0)$ precis då

$$\nabla F(a,b,c) = (2a, 4b, 6c) \parallel (a-1, b, c) \quad \text{och} \quad F(a,b,c) = a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 3.$$

$(2a,4b,6c) \parallel (a-1,b,c) \Leftrightarrow b(a-2) = 0$, $c(2a-3) = 0$ och $bc = 0$. Ekvationen $b(a-2) = 0$ ger $b = 0$ eller $a = 2$, och $a = 2$ insatt i F ger motsägelsen $3 = F(a,b,c) = 4 + 2b^2 + 3c^2 \ge 4$, så $b = 0$. Trivialt är nu $bc = 0$, och $c(2a-3) = 0$ ger att $c = 0$ eller $a = 3/2$. Om $c = 0$ ger insättning i F att $a = \pm\sqrt{3}$ och därmed $(a,b,c) = (\pm\sqrt{3}, 0, 0)$, medan $a = 3/2$ på motsvarande sätt ger $c = \pm 1/2$, och därmed $(a,b,c) = (3/2, 0, \pm 1/2)$.

Normallinjen genom (a,b,c) har riktningsvektor $\boldsymbol{v} \parallel (2a, 4b, 6c)$. Om $(a,b,c) = (\pm\sqrt{3}, 0, 0)$ kan vi välja $\boldsymbol{v} = (1,0,0)$, och får att normallinjerna skär E även i $(\mp\sqrt{3}, 0, 0)$, och i dessa punkter är skärningen också vinkelrät eftersom E har normalvektor $\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{v}$ där.

Om $(a,b,c) = (3/2, 0, 1/2)$ kan vi välja $\boldsymbol{v} = (1,0,1)$, och normallinjens ekvation kan skrivas $(x,y,z) = (3/2+t, 0, 1/2+t)$, $t \in \mathbf{R}$, som insatt i $F(x,y,z) = 3$ ger $t = 0$ eller $t = -3/2$. Fallet $t = 0$ ger oss utgångspunkten $(3/2, 0, 1/2)$, där skärningen trivialt är rät, medan $t = -3/2$ ger oss punkten $(0,0,-1)$, där en normalvektor till E är $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$; vinkeln α mellan vektorerna $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{n}$ fås ur $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{n}|\cos\alpha$ och $0 \le \alpha \le \pi$, så $\alpha = \arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$, och därmed är vinkeln mellan ellipsoiden och normallinjen $\pi/2 - \pi/4 = \pi/4$. Om slutligen $(a,b,c) = (3/2, 0, -1/2)$ får vi analogt (eller av symmetriskäl) samma skärningsvinklar.

Svar: Normallinjerna i $(\pm\sqrt{3}, 0, 0)$ skär ellipsoiden E under rät vinkel i båda sina skärningar med denna, medan normallinjerna i $(3/2, 0, \pm 1/2)$ skär E under rät vinkel och vinkeln $\pi/4$.

7. Sätt

$$g(x,y) = \frac{1}{1 + (x+y)^5}.$$

Då är $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x,n)$ en positiv numerisk serie för varje $x \ge 0$, och för varje sådant x är funktionen $y \mapsto g(x,y)$ positiv och avtagande på $[0,\infty[$. Uppskattning av summa med integral ger

$$0 \le f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g(x,n) \le \int_0^{\infty} g(x,y)\, dy, \quad x \ge 0.$$

Om vi nu låter D stå för första kvadranten $x \ge 0$, $y \ge 0$ och sedan byter variabler till $u = x + y$, $v = y$ med nytt område $E:\ u \ge 0,\ 0 \le v \le u$ och $dxdy = dudv$, får vi

$$0 \le \int_0^{\infty} f(x)\, dx \le \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} g(x,y)\, dy \right) dx = \iint_D \frac{dxdy}{1 + (x+y)^5} = \iint_E \frac{dudv}{1 + u^5}$$
$$= \int_0^{\infty} \frac{u\, du}{1 + u^5} \le \int_0^1 \frac{u}{1}\, du + \int_1^{\infty} \frac{u}{u^5}\, du = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6},$$

så $C = 5/6$ duger. Observera att det är tillåtet med upprepad integration och variabelbyte i de generaliserade dubbelintegralerna ovan eftersom integranderna är positiva.

Svar: $C = 5/6$ duger.

TATA43 Flervariabelanalys 2009-06-05, kommentarer

1. Det är oftast bäst att byta variabler så att det nya området blir enkelt, som i lösningsskissen: $u = x + y$, $v = 2x - 4y$. Eftersom $x + y$ dessutom ingår i integranden är $u = x + y$ tämligen givet som en av de nya variablerna.

   I denna uppgift kan man – även om räkningarna då blir lite längre – sätta v som ett annat linjärt uttryck i x och y, t.ex. $v = x - y$, som flera också har gjort. Det nya området blir då $1 \leq u \leq 3v - u \leq 3$, och enklast är nu att skissa denna mängd genom att först rita upp när vi har likhet i de tre olikheterna ovan: vi får i tur och ordning linjen $1 = u$ (alltså linjen $u = 1$), linjen $u = 3v - u$ (alltså linjen $v = 2u/3$) och linjen $3v - u = 3$ (alltså linjen $v = 1 + u/3$), och sedan markerar vi på vilken sida om de respektive linjerna vi befinner oss (rita själv!); vi får en triangel, som kan beskrivas med $1 \leq u \leq 3$, $2u/3 \leq v \leq 1 + u/3$, och upprepad integration leder oss till målet, om än med något besvärligare räkningar än i lösningsskissen.

   Det fel som många gör är att man hanterar trippelolikheten fel, och ett typiskt fel är följande:

$$1 \leq u \leq 3v - u \leq 3 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq u \overset{*}{\leq} 3v \leq 3 + u \quad \text{(FEL)};$$

   felet som uppstår är markerat med $*$. Naturligtvis är

$$3v - u \leq 3 \;\Leftrightarrow\; 3v \leq 3 + u,$$

   men följande är fel:

$$u \leq 3v - u \;\Leftrightarrow\; u \overset{*}{\leq} 3v \quad \text{(FEL)};$$

   den rätta omskrivningen är

$$u \leq 3v - u \;\Leftrightarrow\; 2u \leq 3v.$$

   En trippelolikhet är ju ett kort sätt att skriva tre separata olikheter, och en korrekt omskrivning av trippelolikheten går via var och en av dessa olikheter:

$$1 \leq u \leq 3v - u \leq 3 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 1 \leq u, \\ u \leq 3v - u, \\ 3v - u \leq 3, \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 1 \leq u, \\ 2u \leq 3v, \\ 3v \leq 3 + u. \end{cases}$$

3. Det enklaste och säkraste sättet är att göra som i lösningsskissen.

   Många integrerar alla tre ekvationerna och pusslar sedan ihop det hela till rätt lösning på ett mer eller mindre oklart sätt. Ni som gör på detta (olämpliga) vis, fundera en stund på hur ni skulle hantera följande nästan identiska system – det enda som skiljer är termen $-y$ i stället för $-x$ i uttrycket för u'_y:

$$(*) \qquad \begin{cases} u'_x = z\,e^{x+2y} - y \\ u'_y = 2z\,e^{x+2y} + 2yz - y \\ u'_z = e^{x+2y} + y^2 - 1 \end{cases}$$

   Integration av dessa ger då

$$\begin{cases} u(x,y,z) = z\,e^{x+2y} - xy + f(y,z) \\ u(x,y,z) = z\,e^{x+2y} + y^2 z - y^2/2 + g(x,z) \\ u(x,y,z) = z\,e^{x+2y} + y^2 z - z + h(x,y) \end{cases}$$

   (Att skriva konstanter i stället för $f(y,z)$, $g(x,z)$ och $h(x,y)$ är FEL.) Vad blir $u(x,y,z)$? Med tanke på hur de inlämnade lösningarna ser ut misstänker jag att många skulle svara

$$u(x,y,z) = z\,e^{x+2y} - xy + y^2 z - y^2/2 - z + C \quad \text{(FEL)},$$

   vilket alltså är fel – ser ni vad som är fel? Faktum är att systemet $(*)$ saknar lösning, vilket också skulle ha upptäckts med metoden i lösningsskissen: integration av $u'_x = z\,e^{x+2y} - y$ ger $u(x,y,z) = z\,e^{x+2y} - xy + f(y,z)$, som deriverad och insatt i ekvationen för u'_y ger $f'_y(y,z) = 2yz + x - y$, vilket är orimligt eftersom vänsterledet endast beror på y och z samtidigt som högerledet även beror på x.

4. För att kunna dra slutsatser om en kvadratisk form genom kvadratkomplettering – vilket ofta är någorlunda enkelt – måste kvadratkompletteringen vara systematiskt genomförd, se exempel 33 (2 variabler) och exempel 35 (3 variabler) i kursbokens kapitel 2.6. Ett vanligt FEL är att dra slutsatser från en kvadratisk form som inte är systematiskt kvadratkompletterad. Jämför följande (i två variabler, för enkelhets skull):

$$Q_1(h,k) = h^2 + 4hk + 3k^2 = (h+k)^2 + 2k^2 + 2hk$$

och

$$Q_2(h,k) = h^2 + 4hk + 5k^2 = (h+k)^2 + 4k^2 + 2hk.$$

Faktum är att Q_1 är indefinit medan Q_2 är positivt definit, men hur kan man se det på uttrycken till höger? Däremot ser man det lätt efter systematisk kvadratkomplettering:

$$Q_1(h,k) = (h+2k)^2 - k^2$$

och

$$Q_2(h,k) = (h+2k)^2 + k^2.$$

5. Precis som i uppgift 1 måste man vara försiktig vid hanteringen av den sammansatta olikheten, i detta fall $x^2 + y^2 \leq 3z^2 \leq 12 - 3x^2 - 3y^2$. Även här är det en bra idé att först undersöka när vi har likhet: $x^2 + y^2 = 3z^2$ är en (dubbel)kon, och $3z^2 = 12 - 3x^2 - 3y^2$ kan skrivas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, som är en sfär med radie 2. I rymdpolära koordinater kan dessa ytor skrivas $r^2 \sin^2\theta = 3r^2\cos^2\theta$ respektive $r^2 = 4$, alltså $\tan\theta = \pm\sqrt{3}$ respektive $r = 2$. Eftersom dessutom $z \leq 0$ inser vi att $\theta = 2\pi/3$, och eftersom också $x \geq 0$ och $y \geq 0$ får vi ur olikheterna gränserna $0 \leq r \leq 2$, $2\pi/3 \leq \theta \leq \pi$ och $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

   Uppgiften kan också lösas med hjälp av skivor eller stavar, som vi nu skall se.

   Alternativ 1 (skivor). Man kan studera skivor D_z för fixt $z \leq 0$. Vi får $x^2 + y^2 \leq 3z^2$, $x^2 + y^2 \leq 4 - z^2$, $x \geq 0$ och $y \geq 0$, så D_z är en kvartscirkelskiva med radie ρ, där $\rho^2 = \min(3z^2, 4 - z^2)$, så $\text{area}(D_z) = 3\pi z^2/4$ då $-1 \leq z \leq 0$ och $\text{area}(D_z) = \pi(4 - z^2)/4$ då $-2 \leq z \leq -1$; tvärsnittet D_z är tomt för alla andra $z \leq 0$. Vi får därför

$$\begin{aligned}\iiint_D e^z\,dxdydz &= \int_{-2}^{0} e^z \left(\iint_{D_z} dxdy\right) dz = \int_{-2}^{0} e^z\,\text{area}(D_z)\,dz \\ &= \frac{\pi}{4}\int_{-2}^{-1}(4 - z^2)e^z\,dz + \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{0} 3z^2 e^z\,dz,\end{aligned}$$

   och dessa z-integraler kan lösas med partiell integration.

   Alternativ 2 (stavar). Man kan studera stavar i z-led. Vi får att projektionen $\tilde{D}$ på xy-planet blir kvartscirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, och stavarna blir $-\sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq z \leq -\sqrt{(x^2 + y^2)/3}$, så

$$\begin{aligned}&\iiint_D e^z\,dxdydz = \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{-\sqrt{(x^2+y^2)/3}} e^z\,dz\right) dxdy \\ &= \iint_{\tilde{D}} \left(e^{-\sqrt{(x^2+y^2)/3}} - e^{-\sqrt{4-x^2-y^2}}\right) dxdy = \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{3}} e^{-\rho/\sqrt{3}}\rho\,d\rho - \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{4-\rho^2}}\rho\,d\rho.\end{aligned}$$

   Här kan man lösa den första ρ-integralen med partiell integration, och i den andra kan man genomföra bytet $t = \sqrt{4 - \rho^2}$ och sedan partialintegrera.

Lars Alexandersson, 18 juni 2009