LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
F-laget

Kurskod TATA43
Provkod TEN1

Tentamen, Flervariabelanalys, 2009-04-17, kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för $f(x,y) = (2-xy)e^{x+y}$.

2. Beräkna $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$ där D ges av $x^2+y^2 \le 4x-2y+11$ och $x+y \ge 1$.

3. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y,z) = 3xz - y$ på halvklotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$, $z \ge 0$.

4. Bestäm alla tangentplan till ytan $x^3+y^2+z=2$ som innehåller punkterna $(1,0,1)$ och $(0,0,4)$.

5. Beräkna volymen av den kropp som beskrivs av $x^2+2y^2 \le z^2$, $x^2+2y^2+3z^2 \le 1$ och $z \ge 0$.

6. Bestäm för $y>0$ alla $\mathcal{C}^2$-lösningar $z(x,y)$ till differentialekvationen

$$x^2 z''_{xx} + 4xyz''_{xy} + 4y^2 z''_{yy} + 2yz'_y = 0$$

sådana att $z(x,1)=0$ och $z(x,4)=\sin x$, t.ex. med hjälp av variabelbytet $u = \dfrac{x}{\sqrt{y}}$ och $v=\sqrt{y}$.

7. Visa att ekvationen $x^4-(1+y^2)x+y^4=0$ definierar en $\mathcal{C}^1$–funktion $x(y)$ i en omgivning av $(1,0)$ och avgör om $x(y)$ har lokalt maximum eller minimum i $y=0$.

Lösningsskisser till tentamen i TATA43, Flervariabelanalys, 2009–04–17

1. Stationära punkter finns då $f'_x = (2 - xy - y)e^{x+y} = 0$, $f'_y = (2 - xy - x)e^{x+y} = 0$, dvs då $(2 - xy - y) = (2 - xy - x) = 0$. Den första likheten ger $y = x$, vilket insatt i den sista ekvationen ger $2 - x^2 - x = 0$ dvs $x = 1$ eller $x = -2$. Således är $(1, 1)$ och $(-2, -2)$ funktionens stationära punkter.

   Vi får $f''_{xx} = (2 - xy - 2y)e^{x+y}$, $f''_{xy} = (1 - xy - x - y)e^{x+y}$, $f''_{yy} = (2 - xy - 2x)e^{x+y}$.

   I punkten $(1, 1)$ blir $f''_{xx} = -e^2$, $f''_{xy} = -2e^2$, $f''_{yy} = -e^2$ och därmed blir den kvadratiska formen

   $Q(h, k) = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^2 & -2e^2 \\ -2e^2 & -e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = -e^2 \left(h^2 + 4hk + k^2\right) = -e^2 \left((h + 2k)^2 - 3k^2\right)$ som är indefinit, ty t.ex. är $Q(1, 0) = -e^2 < 0$ medan $Q(2, -1) = 3e^2 > 0$. Punkten $(1, 1)$ är därmed en sadelpunkt och alltså ingen lokal extrempunkt.

   I punkten $(-2, -2)$ blir $f''_{xx} = 2e^{-4}$, $f''_{xy} = e^{-4}$, $f''_{yy} = 2e^{-4}$ och därmed blir den kvadratiska formen

   $$Q(h, k) = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{-4} & e^{-4} \\ e^{-4} & 2e^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = e^{-4} \left(2h^2 + 2hk + 2k^2\right) = 2e^{-4} \left(h^2 + hk + k^2\right) =$$
   $$= 2e^{-4} \left(\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 \right),$$

   så $Q(h, k) \geq 0$ för alla (h, k), och $Q(h, k) = 0$ endast om $h + \dfrac{k}{2} = 0$ och $k = 0$, d.v.s. endast om $(h, k) = (0, 0)$. Q är således positivt definit, och punkten $(-2, -2)$ är därmed en lokal minimipunkt.

   Svar: $(-2, -2)$ är lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

2. Området D ges av $x^2 + y^2 \leq 4x - 2y + 11$, $x + y \geq 1$ dvs $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 16$, $x + y \geq 1$.

   Vi får via variabelbytet $\begin{cases} u = x - 2 & u^2 + v^2 \leq 16 \\ v = y + 1 & u + v \geq 0, \end{cases}$ $\left|\dfrac{d(x, y)}{d(u, v)}\right| = 1$, följt av bytet

   $\begin{cases} u = r\cos\varphi & 0 \leq r \leq 4 \\ v = r\sin\varphi & -\dfrac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{3\pi}{4}, \end{cases}$ $\left|\dfrac{d(u, v)}{d(r, \varphi)}\right| = r$,

   $$\iint_D \left(x^2 + y^2\right)\, dx\, dy = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^4 \left((r\cos\varphi + 2)^2 + (r\sin\varphi - 1)^2\right) \cdot 1 \cdot r\, dr\, d\varphi = 104\pi + \frac{128\sqrt{2}}{3}.$$

   Svar: $104\pi + \dfrac{128\sqrt{2}}{3}$

3. Bivillkoren $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och $h(x,y,z) = z \geq 0$ beskriver ett halvklot som är en kompakt mängd. Målfunktionen $f(x,y,z) = 3xz - y$ är en kontinuerlig funktion, så f har ett största och ett minsta värde på mängden.

   $\nabla f = (3z, -1, 3x)$, $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla h = (0, 0, 1)$.

   - dim 3 (inre punkter): $\nabla f = (3z, -1, 3x) = (0, 0, 0)$ saknar lösning.
   - dim 2 (sidoytor) består av två delar:
     - ⋆ $g = 1,\ h > 0$: $\nabla f \parallel \nabla g$ gäller då $\bar{0} = \nabla f \times \nabla g = (-2z - 6xy, 6x^2 - 6z^2, 6yz + 2x)$. Andra komponenten ger $x = \pm z$, vilket insatt i övriga komponenter ger möjligheterna $x = z,\ y = -1/3$ eller $x = -z,\ y = 1/3$ (eller $x = z = 0$ som ej ger någon lösning då $h = z > 0$), vilket insatt i ekvationen $g = 1$ ger kandidaterna $f(2/3, -1/3, 2/3) = 5/3$ och $f(-2/3, 1/3, 2/3) = -5/3$.
     - ⋆ $h = 0,\ g < 1$: $\nabla f \parallel \nabla h$ ger inga lösningar.
   - dim 1 (kantkurva $g = 1,\ h = 0$): $\nabla f,\ \nabla g,\ \nabla h$ linjärt beroende $\Longleftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} 3z & 2x & 0 \\ -1 & 2y & 0 \\ 3x & 2z & 1 \end{vmatrix} =$

     $= 6yz + 2x$, vilket tillsammans med ekvationen $h = 0$ ger $x = 0$. Insättning i $g = 1$ ger kandidater $f(0, 1, 0) = -1$ och $f(0, -1, 0) = 1$.
   - dim 0 (hörnpunkter): saknas

   Svar: $f_{\max} = f(2/3, -1/3, 2/3) = 5/3$, $f_{\min} = f(-2/3, 1/3, 2/3) = -5/3$.

4. Med $F(x,y,z) = x^3 + y^2 + z$ kan ytan skrivas som nivåytan $F(x,y,z) = 2$. Låt (a,b,c) beteckna en tangeringspunkt på ytan. Tangentplanets normal $\bar{n} \parallel \nabla F(a,b,c) = (3a^2, 2b, 1)$ och planet innehåller punkterna $(1,0,1)$ och $(0,0,4)$ precis då $\bar{n} \perp (a-1, b-0, c-1)$ och $\bar{n} \perp (a-0, b-0, c-4)$.

   Vi får därför ekvationerna $2 = F(a,b,c) = a^3 + b^2 + c$, $0 = (3a^2, 2b, 1) \cdot (a-1, b, c-1) = 3a^3 + 2b^2 + c - 3a^2 - 1$ och $0 = (3a^2, 2b, 1) \cdot (a, b, c-4) = 3a^3 + 2b^2 + c - 4$.

   De två sista sambanden ger $3a^2 + 1 = 4$ dvs $a = \pm 1$, som insatt i de två första ekvationerna ger de alternativa tangeringspunkterna $(1,0,1)$, $(-1,2,-1)$ och $(-1,-2,-1)$ med tangeringsplan $3x + z = 4$, $3x + 4y + z = 4$ respektive $3x - 4y + z = 4$.

   Svar: $3x + z = 4$, $3x + 4y + z = 4$ och $3x - 4y + z = 4$.

5. Variabelbytet $u = x,\ v = \sqrt{2}y,\ w = \sqrt{3}z$ överför ursprungliga området D på området $E:\ u^2+v^2 \le w^2/3,\ u^2+v^2+w^2 \le 1,\ w \ge 0$, dessutom blir $\left|\dfrac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}\right| = \dfrac{1}{\left|\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.
Därefter ger det rymdpolära bytet $u = r\sin\theta\cos\varphi,\ v = r\sin\theta\sin\varphi,\ w = r\cos\theta$ det nya området $F:\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi/6,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ och $\left|\dfrac{d(u,v,w)}{d(r,\theta,\varphi)}\right| = r^2\sin\theta$ och vi får

$$V = \iiint_D dx\,dy\,dz = \iiint_E \frac{1}{\sqrt{6}}\,du\,dv\,dw = \iiint_F \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{6}}\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \int_0^1 r^2\,dr \cdot \int_0^{\pi/6} \sin\theta\,d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi(2-\sqrt{3})}{3\sqrt{6}}$$

Alternativ: $V = \displaystyle\iint_D \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2-2y^2} - \sqrt{x^2+2y^2}\right)dx\,dy$ *där* D *ges av att* $x^2+2y^2 \le \dfrac{1-x^2-2y^2}{3}$, *dvs* $x^2+2y^2 \le \dfrac{1}{4}$, *med variabelbytet* $x = r\cos\varphi,\ y = \dfrac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi$.

Svar: $V = \dfrac{\pi(2-\sqrt{3})}{3\sqrt{6}}$.

6. Variabelbytet $u = x/\sqrt{y},\ v = \sqrt{y}$ ger $z'_x = z'_u\,u'_x + z'_v\,v'_x = y^{-1/2}z'_u,\ z'_y = z'_u\,u'_y + z'_v\,v'_y =$
$= -\dfrac{1}{2}xy^{-3/2}z'_u + \dfrac{1}{2}y^{-1/2}z'_v$ och vidare $z''_{xx} = (z'_x)'_x = (y^{-1/2}z'_u)'_x = y^{-1}z''_{uu},\ z''_{xy} = (z'_x)'_y =$
$= (y^{-1/2}z'_u)'_y = -\dfrac{1}{2}y^{-3/2}z'_u + y^{-1/2}\left(-\dfrac{1}{2}xy^{-3/2}z''_{uu} + \dfrac{1}{2}y^{-1/2}z''_{uv}\right)$ och $z''_{yy} = (z'_y)'_y =$
$= \left(-\dfrac{1}{2}xy^{-3/2}z'_u + \dfrac{1}{2}y^{-1/2}z'_v\right)'_y = \dfrac{3}{4}xy^{-5/2}z'_u - \dfrac{1}{2}xy^{-3/2}\left(-\dfrac{1}{2}xy^{-3/2}z''_{uu} + \dfrac{1}{2}y^{-1/2}z''_{uv}\right) -$
$- \dfrac{1}{4}y^{-3/2}z'_v + \dfrac{1}{2}y^{-1/2}\left(-\dfrac{1}{2}xy^{-3/2}z''_{uv} + \dfrac{1}{2}y^{-1/2}z''_{vv}\right)$. Insättning i differentialekvationen ger $yz''_{vv} = 0$ dvs $z''_{vv} = 0$ (ty $y > 0$) och successiv integration ger $z'_v = f(u)$ och $z = v\,f(u)+g(u)$, alltså $z(x,y) = \sqrt{y}\,f(x/\sqrt{y}) + g(x/\sqrt{y})$, där f och g är C^2-funktioner av en variabel.
Bivillkoren ger sedan $0 = z(x,1) = f(x) + g(x)$ och $\sin x = z(x,4) = 2f(x/2) + g(x/2)$. Första sambandet ger $g(x) = -f(x)$ vilket insatt i andra sambandet ger $f(x/2) = \sin x$, dvs $f(x) = \sin 2x,\ g(x) = -\sin 2x$. Alltså är $z(x,y) = (\sqrt{y}-1)\sin\dfrac{2x}{\sqrt{y}}$.

Svar: $z(x,y) = (\sqrt{y}-1)\sin\dfrac{2x}{\sqrt{y}}$.

7. Sätt $F(x,y) = x^4 - (1+y^2)x + y^4$. Vår ekvation kan nu skrivas $F(x,y) = 0$, och eftersom $F \in C^1,\ F(1,0) = 0$ och $\nabla F(x,y) = (4x^3-1-y^2, -2xy+4y^3) = (-1,0)$ i punkten $(1,0)$ där alltså x-komponenten$= -1 \ne 0$ så ger implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x,y) = 0$ i en omgivning av $(1,0)$ definierar en C^1-funktion $x = x(y)$. Dessutom är $x'(y) = -\dfrac{F'_y}{F'_x} =$
$= \dfrac{2xy-4y^3}{4x^3-1-y^2}$, så $x'(0) = 0$ dvs funktionen har en stationär punkt i $y = 0$. Vidare är
$x''(y) = \dfrac{(2x'_y\,y + 2x - 12y^2)(4x^3-1-y^2) - (12x^2\,x'_y - 2y)(2xy-4y^3)}{(4x^3-1-y^2)^2}$, så $x''(0) = \dfrac{2}{3} > 0$, dvs funktionen har ett strängt lokalt minimum i $y = 0$.

Svar: $x(y)$ har ett strängt lokalt minimum i $y = 0$.