LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
F-laget

Tentamen, Flervariabelanalys, 2009-01-16, kl 8-13
(Kurskod TATA43, Provkod TEN1)

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
OBS! Skriv personnummer och namn på varje ark som lämnas in.
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för $f(x,y) = x^3 + 6xy + 6y^2$.

2. Beräkna volymen av den kropp som ges av $x^2 - y^2 \leq z \leq 1 - x^2 - 2y^2$.

3. Vilka tangentplan till ytan $xy + yz + xz = 1$ är parallella med planet $x + y + 2z = 3$?

4. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ på ellipsskivan som ges av skärningen mellan planet $x + y + z = 10$ och den fyllda ellipsoiden $3x^2 + y^2 + yz + z^2 \leq 70$.

5. Visa att ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + x^2z - yz - z = 2$ definierar en $\mathcal{C}^1$–funktion $z(x,y)$ i en omgivning av $(1,0,1)$. Bestäm också $z'_x(x,y)$ och $z'_y(x,y)$ i denna omgivning samt ytans tangentplan i punkten $(1,0,1)$.

6. Beräkna $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}\,dxdy$ där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$.

7. Antag att $\mathcal{C}^1$–funktionen $F(x,y)$ är definierad för $x > 0$, $y > 0$ och att alla nivåkurvor till $F(x,y)$ skär alla nivåkurvor till x^2y under rät vinkel. Visa att $F(x,y) = g(x^2 - 2y^2)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$–funktion.

Lösningar till tentamen i TATA43, Flervariabelanalys, 2009–01–16

1. Stationära punkter finns då $f'_x = 3x^2+6y = 0$, $f'_y = 6x+12y = 0$. Den andra ekvationen ger $x = -2y$, som insatt i de första ger $12y^2 + 6y = 12y(y + 1/2) = 0$ dvs $y = 0$ eller $y = -1/2$. Således är $(0, 0)$ och $(1, -1/2)$ funktionens stationära punkter.

   Vi får $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = 6$, $f''_{yy} = 12$.

   I punkten $(0, 0)$ blir $f''_{xx} = 0$, $f''_{xy} = 6$, $f''_{yy} = 12$ och därmed blir den kvadratiska formen

   $Q(h, k) = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 12hk + 12k^2 = 12 \left(\left(k + \frac{h}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}h^2 \right)$ som är indefinit,

   ty t.ex. är $Q(0, 1) = 12 > 0$ medan $Q(2, -1) = -12 < 0$. Punkten $(0, 0)$ är därmed en sadelpunkt och alltså ingen lokal extrempunkt.

   I punkten $(1, -1/2)$ blir $f''_{xx} = 6$, $f''_{xy} = 6$, $f''_{yy} = 12$ och därmed blir den kvadratiska formen

   $Q(h, k) = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 6h^2 + 12hk + 12k^2 = 6 \left((h + k)^2 + k^2 \right)$,

   så $Q(h, k) \geq 0$ för alla (h, k), och $Q(h, k) = 0$ endast om $h + k = 0$ och $k = 0$, d.v.s. endast om $(h, k) = (0, 0)$. Q är således positivt definit, och punkten $(1, -1/2)$ är därmed en lokal minimipunkt.

   Svar: $(1, -1/2)$ är lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

2. Området D:s projektion $\tilde{D}$ i xy-planet ges av $x^2 - y^2 \leq 1 - x^2 - 2y^2$, d.v.s. $2x^2 + y^2 \leq 1$. Vi får via variabelbytet $\begin{cases} \sqrt{2}\,x = r\cos\varphi & 0 \leq r \leq 1 \\ y = r\sin\varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$ $\left| \frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} \right| = \frac{r}{\sqrt{2}}$

   $$V = \iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_{\tilde{D}} \left(1 - x^2 - 2y^2 - \left(x^2 - y^2\right)\right) dx\,dy =$$

   $$= \iint_{\tilde{D}} \left(1 - \left(2x^2 + y^2\right)\right) dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - r^2\right) r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

   Svar: Volymen är $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ v.e.

3. Med $F(x, y, z) = xy + yz + xz$ kan ytan skrivas som nivåytan $F(x, y, z) = 1$. Planet $x + y + 2z = 3$ har en normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Låt $T = (a, b, c)$ beteckna en tangeringspunkt. Då skall $\nabla F(a, b, c) \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $F(a, b, c) = 1$, d.v.s. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + c \\ a + c \\ a + b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b + 2c \\ a - b - 2c \\ b - a \end{pmatrix}$ och $ab + bc + ac = 1$. Parallellitetsvillkoret ger $a = b$, $c = 0$ vilket insatt i sista sambandet ger $a^2 = 1$ d.v.s. $a = \pm 1$. De intressanta punkterna blir därmed $(1, 1, 0)$ och $(-1, -1, 0)$, med tangentplanen $x + y + 2z = 2$ resp $x + y + 2z = -2$.

   Svar: $x + y + 2z = \pm 2$.

4. Bivillkoren $g(x,y,z) = x+y+z = 10$ och $h(x,y,z) = 3x^2+y^2+yz+z^2 \le 70$ beskriver en ellipsskiva som är en kompakt mängd. Målfunktionen $f(x,y,z) = x+2y+3z$ är en kontinuerlig funktion, så f har ett största och ett minsta värde på mängden. $\nabla f = (1,2,3)$, $\nabla g = (1,1,1)$, $\nabla h = (6x, 2y+z, y+2z)$.

   - dim 3 (inre punkter): saknas
   - dim 2 (sidoyta, $g = 10,\ h < 70$): $\nabla f \parallel \nabla g$ saknar lösning, inga kandidater.
   - dim 1 (kantkurva $g = 10,\ h = 70$): $\nabla f,\ \nabla g,\ \nabla h$ linjärt beroende $\Longleftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6x \\ 2 & 1 & 2y+z \\ 3 & 1 & y+2z \end{vmatrix} =$

     $= 3y - 6x$ så $y = 2x$. Insättning i $g = 10,\ h = 70$ ger kandidater $f(1,2,7) = 26$ och $f(3,6,1) = 18$.
   - dim 0 (hörnpunkter): saknas

   Svar: $f_{\min} = f(3,6,1) = 18$, $f_{\max} = f(1,2,7) = 26$.

5. Sätt $F(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+x^2z-yz-z$. Vår ekvation kan nu skrivas $F(x,y,z) = 2$, och eftersom $F \in C^1$, $F(1,0,1) = 2$ och $\nabla F(x,y,z) = (3x^2+2xz, 3y^2-z, 3z^2+x^2-y-1) = (5,-1,3)$ i punkten $(1,0,1)$ där alltså z-komponenten$= 3 \neq 0$ så ger implicita funktionssatsen att ekvationen $F(x,y,z) = 2$ i en omgivning av $(1,0,1)$ definierar en C^1-funktion $z = f(x,y)$. Dessutom är $z'_x(x,y) = -\dfrac{F'_x}{F'_z} = -\dfrac{3x^2+2xz}{3z^2+x^2-y-1}$ och $z'_y(x,y) = -\dfrac{F'_y}{F'_z} = -\dfrac{3y^2-z}{3z^2+x^2-y-1}$. Tangentplanets ekvation (använd att $(5,-1,3)$ är en normal och att $(1,0,1)$ ligger i planet) blir $5x-y+3z = 8$.

   Svar: $z'_x = -\dfrac{3x^2+2xz}{3z^2+x^2-y-1}$, $z'_y = -\dfrac{3y^2-z}{3z^2+x^2-y-1}$, tangentplan $5x-y+3z = 8$.

6. Variabelbytet $u = x+y,\ v = x$ överför D på en triangel E med hörn $(0,0),\ (1,0),\ (1,1)$, dessutom blir $\left|\dfrac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| = 1$.

$$\iint_D e^{(x+y)^2}\,dx\,dy = \iint_E e^{u^2}\,du\,dv = \int_0^1 \int_0^u e^{u^2}\,dv\,du = \int_0^1 u e^{u^2}\,du = \left[\frac{1}{2}e^{u^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

   Svar: $\dfrac{e-1}{2}$.

7. Nivåkurvorna till F är vinkelräta mot nivåkurvorna till $g(x,y) = x^2y$ innebär att $\nabla F \perp \nabla g$, d.v.s. att $(F'_x, F'_y)\cdot(2xy, x^2) = 2xy\,F'_x + x^2\,F'_y = 0$. Variabelbytet $u = x^2-2y^2,\ v = x$ ger $F'_x = F'_u\,u'_x + F'_v\,v'_x = 2xF'_u + F'_v$, $F'_y = F'_u\,u'_y + F'_v\,v'_y = -4yF'_u$ så $2xy\,F'_x + x^2\,F'_y = 2xyF'_v = 0$ d.v.s. $F'_v = 0$ (ty $xy \neq 0$). Integration ger att $F = g(v) = g(x^2-2y^2)$ där g är en godtycklig C^1-funktion, v.s.v.