LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
B-laget

Tentamen, Flervariabelanalys, TATA43/TEN1, 2008-12-20, kl 8-13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
OBS! Skriv personnummer och namn på varje ark som lämnas in.
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1) Lös ekvationen

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad x, y > 0$$

med hjälp av variabelbytet $u = xy,\ v = x/y$ (z är en kontinuerligt deriverbar funktion).

2) Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$$

då $2x + y \leq 4$ och $x \geq 0,\ y \geq 0$. Motivera noga!

3) Beräkna ekvationer för alla plan som tangerar ytan $y^2 + z^2 - x^2 = 1$ och innehåller punkterna $(2, 2, 3)$ och $(3, 3, 5)$.

4) Räkna ut arean av mängden $D = \{(x, y) : x^2 + xy + y^2 \leq 1 \,\text{och}\, x + \frac{1}{2}y \geq \frac{1}{2}\}$.

5) Beräkna integralen

$$\iiint_D \frac{z^2\, dxdydz}{(4x^2 + 2y^2 + z^2)^{3/2}}$$

där D ges av olikheterna $0 < 4x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1$ och $x \geq 0$.

6) Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2xy - 2yz - 2xz.$$

7) Bevisa att ekvationen $x^2 + y^2 + z^2 + \sin z = 0$ i någon omgivning av $(0, 0, 0)$ definierar en funktion $z = f(x, y)$ som har lokalt maximum i $(0, 0)$.

Lösningsförslag. Tentamen, Flervariabelanalys, TATA43, 2008-12-20

1. Variabelbytet $u = xy$, $v = x/y$, ger $z'_x = yz'_u + z'_v/y$ och $z'_y = xz'_u - xz'_v/y^2$. Insättning i differentialekvationen ger därför $xz'_x - yz'_y = 2xz'_v/y = 0$, och, eftersom $x > 0$ och $y > 0$, får vi $z'_v = 0$, som integrerad ger $z = g(u) = g(xy)$, där g är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel.

   Svar: $z(x, y) = g(xy)$, där g är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel.

2. De tre bivillkoren $g(x, y) = 2x + y \le 4$, $x \ge 0$ och $y \ge 0$ bestämmer en sluten och begränsad triangelyta, och målfunktionen $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde för f på denna mängd.

   Vi får $\nabla f = (2x + y - 3, x + 2y - 3)$ och $\nabla g = (2, 1)$. Kandidatjakt:

   - dim 2 (inre punkter, $g < 4$, $x > 0$, $y > 0$): $\nabla f = \mathbf{0}$ ger kandidaten $f(1, 1) = -3$.
   - dim 1 (kanter), består av tre delar:
     * ($g = 4$, $x > 0$, $y > 0$): $\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow y = 1$, som insatt i $g = 4$ ger $x = 3/2$, och därmed kandidaten $f(3/2, 1) = -11/4$.
     * ($g < 4$, $x = 0$, $y > 0$): Här är $f(x, y) = f(0, y) = y^2 - 3y = \varphi(y)$, och $\varphi'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 3/2$, och vi får kandidaten $f(0, 3/2) = -9/4$.
     * ($g < 4$, $x > 0$, $y = 0$): Här är $f(x, y) = f(x, 0) = x^2 - 3x$, och som i föregående del får vi $x = 3/2$ och kandidaten $f(3/2, 0) = -9/4$.
   - dim 0 (hörn): Kandidater $f(0, 0) = 0$, $f(2, 0) = -2$, $f(0, 4) = 4$.

   Svar: $f_{\max} = f(0, 4) = 4$ och $f_{\min} = f(1, 1) = -3$.

3. Med $F(x, y, z) = y^2 + z^2 - x^2$ kan ytan Y skrivas som nivåytan $F(x, y, z) = 1$. Låt (a, b, c) vara en punkt på Y där tangentplanet – förutom punkten (a, b, c) – innehåller punkterna $(2, 2, 3)$ och $(3, 3, 5)$. Detta plan har normalvektor $\boldsymbol{n} \parallel \nabla F(a, b, c) = (-2a, 2b, 2c)$, och det innehåller punkterna $(2, 2, 3)$ och $(3, 3, 5)$ precis då $\boldsymbol{n} \perp (a - 2, b - 2, c - 3)$ och $\boldsymbol{n} \perp (a - 3, b - 3, c - 5)$. Vi får därför ekvationerna $1 = F(a, b, c) = b^2 + c^2 - a^2$, $0 = (-a, b, c) \cdot (a - 2, b - 2, c - 3) = -a^2 + b^2 + c^2 + 2a - 2b - 3c = 2a - 2b - 3c + 1$ och $0 = (-a, b, c) \cdot (a - 3, b - 3, c - 5) = -a^2 + b^2 + c^2 + 3a - 3b - 5c = 3a - 3b - 5c + 1$. De två sista sambanden ger $c = -1$ och $b = a + 2$, som insatt i det första ger $a = -1$, och därmed den enda tangeringspunkten $(a, b, c) = (-1, 1, -1)$. Det sökta tangentplanets normalvektor $\boldsymbol{n} \parallel \nabla F(-1, 1, -1) = (2, 2, -2)$, så tangentplanets ekvation blir $0 = (2, 2, -2) \cdot (x + 1, y - 1, z + 1) = 2x + 2y - 2z - 2$, alltså $x + y - z = 1$.

   Svar: $x + y - z = 1$.

4. D kan skrivas $(x + y/2)^2 + 3y^2/4 \le 1$, $x + y/2 \ge 1/2$, så linjärt byte $u = x + y/2$, $v = y\sqrt{3}/2$ ger ny mängd $E : u^2 + v^2 \le 1$, $u \ge 1/2$ samt $\left|\dfrac{d(u, v)}{d(x, y)}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3}/2$ så att $dxdy = 2\,dudv/\sqrt{3}$. Vi får

$$\begin{aligned} \text{area}(D) &= \iint_D dxdy = \frac{2}{\sqrt{3}} \iint_E dudv = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{area}(E) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi \cdot 1^2}{3} - \frac{2\sin(\pi/3) \cdot 1/2}{2} \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

   eftersom E är en tredjedels cirkelskiva med radie 1 men med en triangel med bas $2\sin(\pi/3)$ och höjd $1/2$ borttagen (rita figur!).

   (Alternativ: $\iint_E dudv = 2\int_{1/2}^{1} \sqrt{1 - u^2}\,du = \big/ u = \sin t \big/ = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \ldots$)

5. Integralen är generaliserad, men integranden är positiv, så variabelbyten och upprepad integration är tillåtet. Linjärt byte $u = 2x$, $v = y\sqrt{2}$, $w = z$ med nytt område $E : 0 < u^2 + v^2 + w^2 \le 1$, $u \ge 0$ samt $\left|\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}\right| = 2\sqrt{2}$ och därmed $dxdydz = dudvdw/2\sqrt{2}$, följt

av sedvanligt rymdpolärt byte $u = r\sin\theta\cos\varphi$, $v = r\sin\theta\sin\varphi$, $w = r\cos\theta$ som ger nytt område $F :\ 0 < r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$ och $dudvdw = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$, ger

$$\begin{aligned}
\iiint_D \frac{z^2\,dxdydz}{(4z^2+2y^2+z^2)^{3/2}} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\iiint_E \frac{w^2\,dudvdw}{(u^2+v^2+w^2)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\iiint_F r\cos^2\theta\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 r\,dr\cdot\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1\cdot\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi\cdot[\varphi]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{6\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

6. $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-2xy-2yz-2xz$. Stationära punkter fås ur ekvationssystemet $f'_x = 3x^2-2y-2z = 0$, $f'_y = 3y^2-2x-2z = 0$, $f'_z = 3z^2-2y-2x = 0$, som kan skrivas $3x^2 = 2(y+z)$, $3y^2 = 2(x+z)$, $3z^2 = 2(x+y)$.

   Den första minus den andra ger $3(x^2-y^2) = 2(y-x)$, alltså $3(x+y)(x-y) = -2(x-y)$, det vill säga $(x-y)(3x+3y+2) = 0$, som ger $x = y$ eller $x+y = -2/3$. Eftersom $x+y = 3z^2/2 \ge 0$ enligt den tredje ekvationen måste således $x = y$. På samma sätt får vi $x = z$, och således är $x = y = z$. Insättning av detta i första ekvationen ger $3x^2 = 4x$, alltså $x = 0$ eller $x = 4/3$. De stationära punkterna är således $(0,0,0)$ och $(4/3,4/3,4/3)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = -2$, $f''_{xz} = -2$, $f''_{yy} = 6y$, $f''_{yz} = -2$ och $f''_{zz} = 6z$.

   I punkten $(0,0,0)$ blir $f''_{xx} = 0$, $f''_{yy} = 0$ och $f''_{zz} = 0$, och därmed får vi den kvadratiska formen

$$\begin{aligned}
Q(h,k,l) &= \begin{pmatrix} h & k & l\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ l\end{pmatrix} \\
&= -4hk-4hl-4kl,
\end{aligned}$$

   som är indefinit eftersom t.ex. $Q(0,1,-1) = 4 > 0$ medan $Q(0,1,1) = -4 < 0$, så punkten $(0,0,0)$ är ingen lokal extrempunkt för f.

   I punkten $(4/3,4/3,4/3)$ blir $f''_{xx} = 8$, $f''_{yy} = 8$ och $f''_{zz} = 8$, och därmed får vi den kvadratiska formen

$$Q(h,k,l) = 8h^2+8k^2+8l^2-4hk-4hl-4kl = 8\left(h-\frac{k}{4}-\frac{l}{4}\right)^2+\frac{15}{2}\left(k-\frac{l}{3}\right)^2+\frac{20}{3}l^2,$$

   så $Q(h,k,l) \ge 0$ för alla (h,k,l), och $Q(h,k,l) = 0$ endast om $h-k/4-l/4 = 0$, $k-l/3 = 0$ och $l = 0$, d.v.s. endast om $(h,k,l) = (0,0,0)$. Q är alltså positivt definit, och punkten $(4/3,4/3,4/3)$ är därmed en lokal minimipunkt för f.

   Svar: $(4/3,4/3,4/3)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

7. Sätt $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+\sin z$; då kan ekvationen skrivas $F(x,y,z) = 0$. Eftersom $F(0,0,0) = 0$, $F \in \mathcal{C}^1$ och $\nabla F = (2x,2y,2z+\cos z) = (0,0,1)$ i punkten $(0,0,0)$, och alltså z-komponenten av gradienten $\ne 0$ där, ger implicita funktionssatsen att den givna ekvationen definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $z(x,y)$ i en omgivning av $(0,0,0)$; trivialt är $z(0,0) = 0$.

   Att funktionen $z(x,y)$ har lokalt maximum i $(0,0)$ kan nu ses på följande sätt. Eftersom $z(x,y)$ speciellt är kontinuerlig i $(0,0)$ och $z(0,0) = 0$ följer det att det finns ett $\delta > 0$ sådant att $|z(x,y)| < \pi/2$ då $|(x,y)| < \delta$. För dessa (x,y) har därför $z(x,y)$ och $\sin z(x,y)$ samma tecken, och eftersom

$$\sin z(x,y) = -x^2-y^2-z(x,y)^2 < 0 \qquad \text{då } 0 < |(x,y)| < \delta,$$

   inser vi att $z(x,y) < 0 = z(0,0)$ då $0 < |(x,y)| < \delta$, vilket just visar att $(0,0)$ är ett (strängt) lokalt maximum.

   (Alternativt kan man Maclaurin-utveckla $z(x,y)$ genom implicit derivering flera gånger: man får $z = z'_x = z'_y = z''_{xy} = 0$ och $z''_{xx} = z''_{yy} = -2$ i $(x,y) = (0,0)$, så $z(x,y) = -x^2-y^2+\mathcal{O}(\rho^3)$.)