LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
F-laget

Tentamen, Flervariabelanalys, TATA43, 2008-08-14, kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
OBS! Skriv personnummer och namn på varje ark som lämnas in.
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

1. Beräkna $\iint_D x(y+1)\,dxdy$ där D ges av $x^2 - 2x + 4y^2 \leq 2$.

2. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

3. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y, z) = x + y + z$ då $x^2 + 2y^2 \leq z$ och $x + z \leq \frac{7}{4}$.

4. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$–lösningar $z(x, y)$ till $3z''_{xx} - 4z''_{xy} + z''_{yy} = 2x + 4y$ sådana att $z(-y, y) = 0$ och $z(x, 0) = 0$, t.ex. med hjälp av variabelbytet $u = x + y$ och $v = x + 3y$.

5. Beräkna $\iiint_D xyz\,dxdydz$ där D ges av $y^2 \leq z \leq x \leq y$.

6. Visa att ekvationssystemet $\begin{cases} y + e^{xy} + \sin(xz) &= 1 \\ \ln(x + y) + x^2yz &= 0 \end{cases}$ definierar $\mathcal{C}^1$–funktioner $x(z)$ och $y(z)$ i en omgivning av $(1, 0, \pi)$. Beräkna också $x'(\pi)$ och $y'(\pi)$.

7. Låt C vara mängden av alla punkter på paraboloiden $z = x^2 + 2y^2$ i vilka tangentplanet innehåller punkten $(1, 1, -1)$. Bestäm och beskriv projektionen av C i xy-planet.

Lösningsförslag. Tentamen, Flervariabelanalys, TATA43, 2008-08-14

1. D kan skrivas $(x-1)^2+(2y)^2 \le 3$, så linjärt byte $u = x-1$, $v = 2y$, som ger ny mängd $E : u^2+v^2 \le 3$ och $dxdy = dudv/2$, följt av planpolärt byte, ger

$$\iint_D x(y+1)\,dxdy = \iint_E (u+1)\left(\frac{v}{2}+1\right)\frac{dudv}{2} = \frac{1}{4}\iint_E (uv+2u+v+2)\,dudv$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\int_0^{2\pi}(\rho^2\cos\varphi\sin\varphi+2\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+2)\,d\varphi\right)\rho d\rho$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}}\left[\rho^2\frac{\sin^2\varphi}{2}+2\rho\sin\varphi-\rho\cos\varphi+2\varphi\right]_0^{2\pi}\rho\,d\rho = \int_0^{\sqrt{3}}\pi\rho\,d\rho = \frac{3\pi}{2}.$$

2. Stationära punkter fås ur $f'_x = 6x^2+y^2+10x = 0$, $f'_y = 2xy+2y = 2y(x+1) = 0$. Andra ekvationen ger alltså fallen $y=0$ och $x=-1$. När $y=0$ ger första ekvationen $6x^2+10x=0$, alltså $x=0$ eller $x=-5/3$, och när $x=-1$ ger den $y^2=4$, alltså $y=\pm 2$. f har alltså fyra stationära punkter: $(0,0)$, $(-5/3,0)$, $(-1,2)$ och $(-1,-2)$.

   Andraderivatorna blir $f''_{xx} = 12x+10$, $f''_{xy} = 2y$ och $f''_{yy} = 2x+2$, och den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = f''_{xx}h^2+2f''_{xy}hk+f''_{yy}k^2.$$

   I $(0,0)$ får vi $Q(h,k) = 10h^2+2k^2$, så $Q(h,k)\ge 0$ för alla (h,k), och $Q(h,k)=0$ endast om $(h,k)=(0,0)$. Q är alltså positivt definit, så $(0,0)$ är en lokal minimipunkt.

   I $(-5/3,0)$ får vi $Q(h,k) = -10h^2-4k^2/3$, så $Q(h,k)\le 0$ för alla (h,k), och $Q(h,k)=0$ endast om $(h,k)=(0,0)$. Q är alltså negativt definit, så $(-5/3,0)$ är en lokal maximipunkt.

   I $(-1,2)$ får vi $Q(h,k) = -2h^2+8hk = -2(h-2k)^2+8k^2$, så Q är indefinit: t.ex. är $Q(1,0)=-2<0$ och $Q(2,1)=8>0$. $(-1,2)$ är alltså ingen lokal extrempunkt.

   I $(-1,-2)$ får vi $Q(h,k) = -2h^2-8hk = -2(h+2k)^2+8k^2$, så Q är indefinit: t.ex. är $Q(1,0)=-2<0$ och $Q(2,-1)=8>0$. $(-1,-2)$ är alltså ingen lokal extrempunkt.

   Svar: $(0,0)$ är en lokal minimipunkt och $(-5/3,0)$ är en lokal maximipunkt.

3. Bivillkoren $g(x,y,z) = x^2+2y^2-z \le 0$ och $h(x,y,z) = x+z \le 7/4$ bestämmer en sluten och begränsad mängd mellan en paraboloid och ett plan, och målfunktionen $f(x,y,z) = x+y+z$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde.

   Vi får $\nabla f = (1,1,1)$, $\nabla g = (2x,4y,-1)$ och $\nabla h = (1,0,1)$. Kandidatjakt:

   - dim 3 (inre punkter, $g<0$, $h<7/4$): $\nabla f \ne \mathbf{0}$ överallt, så här finns inga kandidater.
   - dim 2 (ytor), består av två delar:
     * ($g=0$, $h<7/4$): $\nabla f \parallel \nabla g \iff 2x=-1$ och $4y=-1$, som insatt i $g=0$ ger kandidaten $f(-1/2,-1/4,3/8) = -3/8$, ty $h(-1/2,-1/4,3/8) = -1/8 < 7/4$.
     * ($g<0$, $h=7/4$): $\nabla f \parallel \nabla h$ är aldrig sant, så kandidater saknas här.
   - dim 1 (kurvan $g=0$, $h=7/4$): $\{\nabla f, \nabla g, \nabla h\}$ är linjärt beroende $\iff x=-1/2$, som insatt i $g=0$ och $h=7/4$ ger $z=9/4$ och $y=\pm 1$ och därmed kandidaterna $f(-1/2,1,9/4) = 11/4$ och $f(-1/2,-1,9/4) = 3/4$.
   - dim 0 (hörn): tomt.

   Sammantaget blir $f_{\max} = f(-1/2,1,9/4) = 11/4$ och $f_{\min} = f(-1/2,-1/4,3/8) = -3/8$.

4. Variabelbytet $u = x + y$, $v = x + 3y$ ger $z'_x = z'_u + z'_v$ och $z'_y = z'_u + 3z'_v$, och sedan $z''_{xx} = (z'_x)'_x = (z'_u + z'_v)'_x = (z'_u + z'_v)'_u + (z'_u + z'_v)'_v = z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}$; på motsvarande sätt får vi $z''_{xy} = z''_{uu} + 4z''_{uv} + 3z''_{vv}$ och $z''_{yy} = z''_{uu} + 6z''_{uv} + 9z''_{vv}$.

   Insättning i differentialekvationen ger $-4z''_{uv} = u + v$, alltså $z''_{uv} = -(u+v)/4$, och successiv integration ger $z'_u = -(2uv + v^2)/8 + g(u)$ och $z = -(u^2v + uv^2)/8 + G(u) + H(v)$, alltså

$$z(x, y) = -\frac{(x + y)^2(x + 3y) + (x + y)(x + 3y)^2}{8} + G(x + y) + H(x + 3y),$$

   där G och H är $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel.

   Bivillkoren ger sedan $0 = z(-y, y) = G(0) + H(2y)$, alltså $H(t) = -G(0)$, för alla t, och $0 = z(x, 0) = -x^3/4 + G(x) + H(x)$, som i sin tur ger $G(x) = x^3/4 - H(x) = x^3/4 + G(0)$, så $G(t) = t^3/4 + G(0)$ för alla t. Lösningen som uppfyller bivillkoren är alltså

$$z(x, y) = -\frac{(x + y)^2(x + 3y) + (x + y)(x + 3y)^2}{8} + \frac{(x + y)^3}{4} = -\frac{(x + y)(3x + 5y)y}{4}.$$

5. D:s projektion på xy-planet är $\tilde{D} = \{(x, y) : y^2 \le x \le y\}$, och stavarna i z-led är $y^2 \le z \le x$. Projektionen $\tilde{D}$ kan beskrivas med $0 \le y \le 1$, $y^2 \le x \le y$ (rita figur!), så upprepad integration ger

$$\begin{aligned}\iiint_D xyz\,dxdydz &= \iint_{\tilde{D}} \left(\int_{y^2}^{x} xyz\,dz\right) dxdy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} \frac{x^3y - xy^5}{2}\,dx\right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{y^9 - 2y^7 + y^5}{8}\,dy = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{480}.\end{aligned}$$

   (Alternativt kan man använda skivor på fixa y-nivåer, t.ex.; tvärsnittet D_y blir då en triangel, och projektionen av D på y-axeln blir $0 \le y \le 1$.)

6. Sätt $P = (1, 0, \pi)$. Med $F(x, y, z) = y + e^{xy} + \sin xz$ och $G(x, y, z) = \ln(x + y) + x^2yz$ kan ekvationssystemet skrivas $F(x, y, z) = 1$, $G(x, y, z) = 0$. Vi ser genast att $F \in \mathcal{C}^1$ och $G \in \mathcal{C}^1$ samt att $F(P) = 1$ och $G(P) = 0$. Vidare,

$$\boldsymbol{t} = \nabla F(P) \times \nabla G(P) = (-\pi, 2, -1) \times (1, \pi + 1, 0) = (\pi + 1, -1, -\pi^2 - \pi - 2)$$

   har z-komponent $\neq 0$, så implicita funktionssatsen ger lokala $\mathcal{C}^1$-funktioner $x(z)$ och $y(z)$ kring P som löser ekvationssystemet. Eftersom $(x'(\pi), y'(\pi), 1) \parallel \boldsymbol{t}$ följer slutligen att

$$x'(\pi) = -\frac{\pi + 1}{\pi^2 + \pi + 2}, \quad y'(\pi) = \frac{1}{\pi^2 + \pi + 2}.$$

   (Alternativ: Derivera ekvationerna implicit m.a.p. z, sätt in P, och lös ut $x'(\pi)$ och $y'(\pi)$.)

7. Sätt $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z$; då kan ytan S skrivas $F(x, y, z) = 0$. Tangentplanet till S i $Q = (a, b, c) \in S$ går genom $P = (1, 1, -1)$ precis då $\nabla F(Q) = (2a, 4b, -1) \perp (a-1, b-1, c+1)$ och $F(a, b, c) = 0$, d.v.s. precis då $2a^2 - 2a + 4b^2 - 4b - c - 1 = 0$ och $a^2 + 2b^2 - c = 0$. Genom att eliminera c (och byta bokstäverna (a, b, c) mot (x, y, z)) kan mängden C således skrivas

$$C = \{(x, y, z) : (x - 1)^2 + 2(y - 1)^2 = 4,\ z = x^2 + 2y^2\},$$

   och dennas projektion på xy-planet är alltså ellipsen

$$\left(\frac{x - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y - 1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$