LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
F-laget

## Tentamen, Flervariabelanalys, TATA43, 2008-05-28, kl 8-13

Inga hjälpmedel tillåtna (inte heller miniräknare).
OBS! Skriv personnummer och namn på varje ark som lämnas in.
8/12/16 poäng med minst 3/4/5 uppgifter med minst 2 poäng (av 3 möjliga) ger betyg 3/4/5.
Länk till lösningsskiss finns efter tentamen på kursens hemsida.
Resultatet blir klart inom 10 arbetsdagar. Information om visning ges då på kursens hemsida.

**1.** Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för $f(x,y,z) = \dfrac{y}{x} - \dfrac{z}{y} - \dfrac{1}{z} + \ln x$.

**2.** Beräkna $\displaystyle\iint_D (x+y)e^{(x-2y)^3}\,dxdy$ där $D$ är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,-1)$ och $(3,0)$.

**3.** Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = xy$ på den del av ellipsbågen $x^2+2xy+4y^2 = 7$ som ges av $x \geq 2$.

**4.** Normallinjen till ytan $x^2+y^2+2z^2 = 4$ i punkten $(1,-1,1)$ skär ytan i ytterligare en punkt $P$. Bestäm $P$ och ytans tangentplan i $P$.

**5.** Bestäm alla $\mathcal{C}^1$–funktioner $f(x,y,z,t)$ sådana att
$$\begin{cases} f'_x &= -ye^{-xy}\sin(zt) + \frac{2x}{1+x^2+y^2} - z \\ f'_y &= -xe^{-xy}\sin(zt) + \frac{2y}{1+x^2+y^2} + z \\ f'_z &= te^{-xy}\cos(zt) - x + y \\ f'_t &= ze^{-xy}\cos(zt) + 8t \end{cases}$$
och $f(0,0,0,1) = 0$.

**6.** Beräkna volymen av den kropp som beskrivs av $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3} \leq a^{2/3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$ ($a > 0$ är en konstant).

**7.** Bestäm alla $\mathcal{C}^1$–funktioner $z(x,y)$ sådana att
$$\begin{cases} x^2 z'_x + yz'_y = 0\,, \quad x > 0\,, \quad y > 0 \\ z(1,y) = \sin y\,, \quad y > 0 \end{cases}.$$
Ledning: studera $z(x,y)$ på kurvor $y = y(x)$ på vilka $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x^2}$.

**Lösningsförslag. Tentamen, Flervariabelanalys, TATA43, 2008-05-28**

1. $f(x,y,z) = y/x - z/y - 1/z + \ln x$ är definierad då $x > 0$, $y \neq 0$ och $z \neq 0$. Stationära punkter fås ur $f'_x = -y/x^2 + 1/x = 0$, $f'_y = 1/x + z/y^2 = 0$ och $f'_z = -1/y + 1/z^2 = 0$, alltså ur systemet $x = y$, $y^2 = -xz$ och $y = z^2$. Vi får, eftersom alla variabler är skilda från noll, $x = y = -z$ och $z = -1$, så $(1,1,-1)$ är funktionens enda stationära punkt.

   Vidare blir andraderivatorna $f''_{xx} = 2y/x^3 - 1/x^2$, $f''_{xy} = -1/x^2$, $f''_{xz} = 0$, $f''_{yy} = -2z/y^3$, $f''_{yz} = 1/y^2$ och $f''_{zz} = -2/z^3$, så i punkten $(1,1,-1)$ blir den kvadratiska formen

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} \\ &= h^2 - 2hk + 2k^2 + 2kl + 2l^2 = (h-k)^2 + (k+l)^2 + l^2, \end{aligned}$$

   så $Q(h,k,l) \geq 0$ för alla $(h,k,l)$, och $Q(h,k,l) = 0$ endast om $h - k = 0$, $k + l = 0$ och $l = 0$, d.v.s. endast om $(h,k,l) = (0,0,0)$. $Q$ är alltså positivt definit, och punkten $(1,1,-1)$ är därmed en lokal minimipunkt för $f$.

   Svar: $(1,1,-1)$ är en lokal minimipunkt. Lokala maximipunkter saknas.

2. Linjärt byte $u = x + y$, $v = x - 2y$, som ger $dxdy = dudv/3$ och ny triangel $E$ med hörn i $(0,0)$, $(0,3)$ och $(3,3)$, ger

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y)e^{(x-2y)^3}\,dxdy &= \iint_E ue^{v^3}\frac{dudv}{3} = \int_0^3 \frac{e^{v^3}}{3}\left(\int_0^v u\,du\right)dv \\ &= \int_0^3 \frac{v^2e^{v^3}}{6}\,dv = \left[\frac{e^{v^3}}{18}\right]_0^3 = \frac{e^{27}-1}{18}. \end{aligned}$$

3. Bivillkoren $g(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2 = 7$ och $h(x,y) = x \geq 2$ bestämmer en sluten delmängd av en ellipskurva – alltså en kompakt mängd – och målfunktionen $f(x,y) = xy$ är kontinuerlig där. Alltså existerar största och minsta värde.

   Vi får $\nabla f = (y,x)$ och $\nabla g = (2x+2y, 2x+8y)$. Kandidatjakt:

   - dim 2: tomt (vi är hela tiden *på* ellipskurvan $g = 7$).
   - dim 1 ($g = 7$, $h > 2$): $\nabla f \parallel \nabla g \iff x^2 = 4y^2 \iff x = \pm 2y$, som insatt i $g = 7$ ger kandidaten $f(\sqrt{7}, -\sqrt{7}/2) = -7/2$. (Övriga (tre) punkter uppfyller ej $h > 2$.)
   - dim 0 ($g = 7$, $h = 2$): vi får kandidaterna $f(2,1/2) = 1$ och $f(2,-3/2) = -3$.

   Sammantaget blir $f_{\max} = f(2,1/2) = 1$ och $f_{\min} = f(\sqrt{7}, -\sqrt{7}/2) = -7/2$.

4. Med $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ kan ytan $Y$ skrivas som nivåytan $F(x,y,z) = 4$. Normallinjen $L$ till $Y$ i $(1,-1,1)$ har därför riktningsvektor $\boldsymbol{v} \parallel \nabla F(1,-1,1) = (2,-2,4) \parallel (1,-1,2)$, så $L$:s ekvation i parameterform är $(x,y,z) = (1+t, -1-t, 1+2t)$, $t \in \mathbf{R}$. Linjen $L$ skär $Y$ precis då $(1+t)^2 + (-1-t)^2 + 2(1+2t)^2 = 4$, d.v.s. precis då $t = 0$ (då vi återfår den givna punkten) eller $t = -6/5$, så den andra skärningspunkten

$$P = (-1/5, 1/5, -7/5).$$

   Det sökta tangentplanets normalvektor $\boldsymbol{n} \parallel \nabla F(-1/5, 1/5, -7/5) = (-2/5, 2/5, -28/5) \parallel (1,-1,14)$, så tangentplanets ekvation i $P$ är

$$x - y + 14z = -20.$$

5. Integration av ekvation 1 ger $f(x,y,z,t) = e^{-xy}\sin(zt) + \ln(1+x^2+y^2) - xz + g(y,z,t)$. Derivering av $f$ m.a.p. $y$ och insättning i ekvation 2 ger $g'_y(y,z,t) = z$, så $g(y,z,t) = yz + h(z,t)$. Derivering av $f(x,y,z,t) = e^{-xy}\sin(zt) + \ln(1+x^2+y^2) - xz + yz + h(z,t)$ m.a.p. $z$ och insättning i ekvation 3 ger $h'_z(z,t) = 0$, så $h(z,t) = k(t)$. Derivering av $f$ m.a.p. $t$ och insättning i ekvation 4 ger $k'(t) = 8t$, så $k(t) = 4t^2 + C$. Bivillkoret $f(0,0,0,1) = 0$ ger slutligen $C = -4$.

   Svar: $f(x,y,z,t) = e^{-xy}\sin(zt) + \ln(1+x^2+y^2) - xz + yz + 4t^2 - 4$.

6. Variabelbytet $x = u^3$, $y = v^3$, $z = w^3$, som ger ny mängd $E: u^2+v^2+w^2 \le a^{2/3}$, $u \ge 0$, $v \ge 0$, $w \ge 0$ och $dxdydz = 27u^2v^2w^2dudvdw$, följt av rymdpolärt byte, som ger ny mängd $F: 0 \le r \le a^{1/3}$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \varphi \le \pi/2$ och $dudvdw = r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$, ger, med $t = \cos\theta$ i ett senare steg,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dxdydz = \iiint_E 27u^2v^2w^2dudvdw \\ &= \int_0^{a^{1/3}} 27r^8\,dr \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi \\ &= 3a^3 \cdot \int_0^1 (t^2 - 2t^4 + t^6)\,dt \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4\varphi}{8}\,d\varphi = 3a^3 \cdot \frac{8}{105}\left[\frac{\varphi}{8} - \frac{\sin 4\varphi}{32}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^3}{70}. \end{aligned}$$

7. Differentialekvationen $y' = y/x^2$ då $x > 0$ och $y > 0$ är separabel och har den allmänna lösningen $y(x) = Ae^{-1/x}$, där konstanten $A > 0$. Om vi fixerar $A$ och studerar $z$ på tillhörande kurva genom att sätta $f(x) = z(x, y(x))$ får vi, eftersom $y' = y/x^2$,

$$f'(x) = z'_x(x,y(x)) \cdot 1 + z'_y(x,y(x)) \cdot y'(x) = \frac{1}{x^2}\left(x^2 z'_x(x,y(x)) + y(x) z'_y(x,y(x))\right) = 0$$

   då $x > 0$, så $f$ är alltså konstant, och således är $z$ konstant på kurvan. Denna konstant kan dock vara olika för de olika kurvorna, så med andra ord finns det en funktion $g$ sådan att $z(x, Ae^{-1/x}) = g(A)$, $x > 0$, $A > 0$. Bivillkoret $z(1,y) = \sin y$ ger nu $z(1, Ae^{-1}) = \sin(Ae^{-1})$, så $g(A) = \sin(Ae^{-1})$, $A > 0$. Omskrivningen $y = Ae^{-1/x}$ ger slutligen

$$z(x,y) = \sin(ye^{1/x-1}), \quad x > 0,\ y > 0.$$

   (Alternativt kan man utnyttja kurvorna ovan till ett variabelbyte: $u = ye^{1/x}$ och (t.ex.) $v = y$. Då blir $0 = x^2 z'_x + y z'_y = y z'_v$, och vi får $z = h(u) = h(ye^{1/x})$, och bivillkoret ger $h(t) = \sin(te^{-1})$ för $t > 0$ och därmed $z(x,y) = \sin(ye^{1/x-1})$ som ovan.)