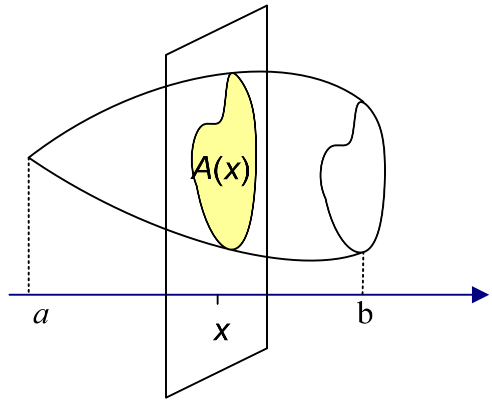
TILLÄMPNINGAR AV INTEGRALER. VOLYMBERÄKNING.

Huvud verktyg för volymberäkning är dubbelintegral (som tillhör kursen i flervariabelanalys), men några volymberäkningar kan vi göra med hjälp av enkelintegral.



Här betraktar vi två fall:
1. Volymberäkningar med hjälp av skivmetoden och
2. Rotationsvolymer

1. SKIVFORMELN

Låt *K* vara en kropp som ligger mellan planen *x*=*a* och *x*=*b*. Låt *A*(*x*) vara arean av skärning mellan kroppen K och planet som genom punkten (x,0, 0) vinkelrät mot x- axeln. Vi antar att *A*(*x*) är **kontinuerlig** i intervallet [*a* , *b*]

1. Kroppens volym *V*(*K*) kan beräknas med ” skivformeln”:

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)dx}$$

Förklaring: Vi delar kroppen i tunna skivor med planen $x = x_k$. Volymen av en sådan skiva kan approximeras med $A(x_k)\cdot(x_{k+1} - x_k)$ [detta är volymen av en cylindrisk kropp med basens area $A(x_k)$ och höjden $\Delta x_k = (x_{k+1} - x_k)$]. Därför

$$V = \lim_{\max|\Delta x_k|\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n} A(x_k)\cdot(x_{k+1} - x_k)\right) = \int_a^b A(x)dx$$

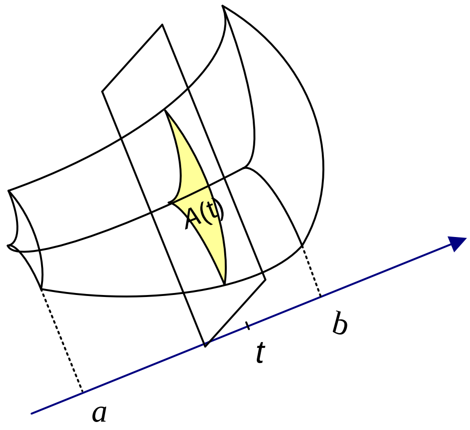
2. Volymen av den del av kroppen som ligger mellan *a* och *x* (i x-led) kan betraktas som en funktion av x:

$$V(x) = \int_a^x A(t)dt\ .$$

Därför $V'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x A(t)dt\right) = A(x)$ (enligt analysens huvudsats).

och därmed blir **differentialen** $DV(x) = V'(x)dx = A(x)dx$

Anmärkning. I ovanstående formler integrerar vi längs x-axeln men skivmetoden kan användas längs vilken linje som helst (säg t-axel) i 3D rummet , om man känner arean A(t) för varje plan skärning vinkelrät mot axeln.

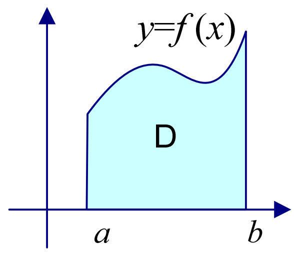


Om kroppen K ligger mellan planen vinkelräta mot t axeln i punkterna *a* och *b* blir volymen

$$V = \int_a^b A(t)dt$$

==

ROTATIONSVOLYM



Låt D vara ett plant område mellan en kontinuerlig kurva

$y = f(x)$, där $f(x) \geq 0$, och x-axeln

som definieras med $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$.

1. Volymen av kroppen som alstras då området D roterar kring *x*-axeln är

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx}$$

2. Volymen av kroppen som alstras då samma område D roterar kring *y*-axeln är

$$\boxed{V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)dx}$$

ÖVNINGAR

Uppgift 1.

Låt *K* vara en kropp som ligger mellan planen $x=a$ och $x=b$. Låt $A(x)$ vara arean av skärning mellan kroppen K och planet som genom punkten (x,0,0) vinkelrät mot x- axeln. Beräkna, med skivformeln, volymen av kroppen K då

a) $A(x) = x^2$, $a = 1$, $b = 2$, dvs $x \in [1, 2]$.

b) $A(x) = e^{-2x}$, $a = 0$, $b = \infty$, dvs $x \in [0, \infty]$.

Lösning:

a) $V = \int_a^b A(x)dx = \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{3}$

b) $V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^\infty e^{-2x} dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^\infty = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-2b}}{-2} - \frac{e^0}{-2}\right] = \frac{1}{2}$

Uppgift 2.

Låt *K* vara en kropp som ligger mellan planen $x=1$ och $x=2$. Beräkna, med skivformeln, volymen av kroppen K då skärning mellan kroppen K och planet som genom punkten (x,0,0) vinkelrät mot x- axeln är

a) en cirkeln med radien $r(x) = \frac{x}{2}$

b) en ellips med halvaxlar $a(x) = x$ och $b(x) = 3x$

c) en rektangeln med sidor $a(x) = x$ och $b(x) = \frac{x}{2}$

Lösning:

a) $A(x) = r^2\pi = \frac{x^2\pi}{4}$,

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_1^2 \frac{x^2\pi}{4} dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7\pi}{12}$$

b) $A(x) = ab\pi = x \cdot 3x \cdot \pi = 3x^2\pi$,

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_1^2 3x^2\pi dx=\pi\left[x^3\right]_1^2=7\pi$$

c) $A(x)=x\cdot\frac{x}{2}=\frac{x^2}{2}$,

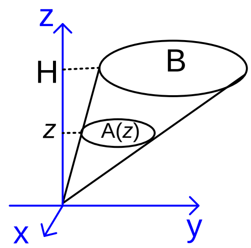
$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_1^2 \frac{x^2}{2}dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_1^2=\frac{7}{6}$$

Uppgift 3. Visa att volymen av en kon med basytans area *B* och höjden *H* är

$$V=\frac{B\cdot H}{3}$$

Lösning: För att förenkla beräkning, betraktar vi en kon med spetsen i origo och basen parallell med xy-planet.

Med hjälp av likformighet har vi



$$\frac{A(z)}{B}=\frac{z^2}{H^2} \quad\Rightarrow\quad A(z)=\frac{z^2}{H^2}B\,.$$

Därför

$$V=\int_a^b A(z)dz=\int_0^H \frac{z^2}{H^2}Bdz=\frac{B}{H^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^H=\frac{B}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3}=\frac{BH}{3}$$ vad skulle visas.

Uppgift 4. Visa att volymen av en pyramid med basytans area *B* och höjden *H* är

$$V=\frac{B\cdot H}{3}$$

Tips. Absolut samma resonemang som ovan.

Uppgift 5. Använd skivmetoden för att visa att klotets volym är $V=\frac{4R^3\pi}{3}$ där R betecknar klotets radie.

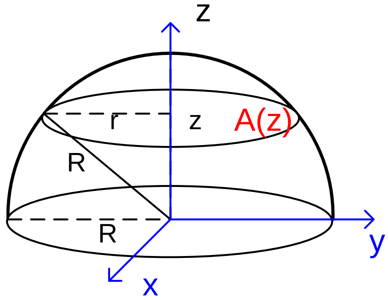
Lösning: Vi beräknar först volymen av en halvklot (se nedanstående figur). Låt r=r(z) vara radien för den cirkel som är snittet mellan halvklot och planet genom z (vinkelrät mot z-axeln).

Vi har följande samband

$R^2=z^2+r^2\Rightarrow r^2=R^2-z^2$. Härav blir snittets area

$$A(z)=r^2\pi=(R^2-z^2)\pi$$

och halvklotets volym



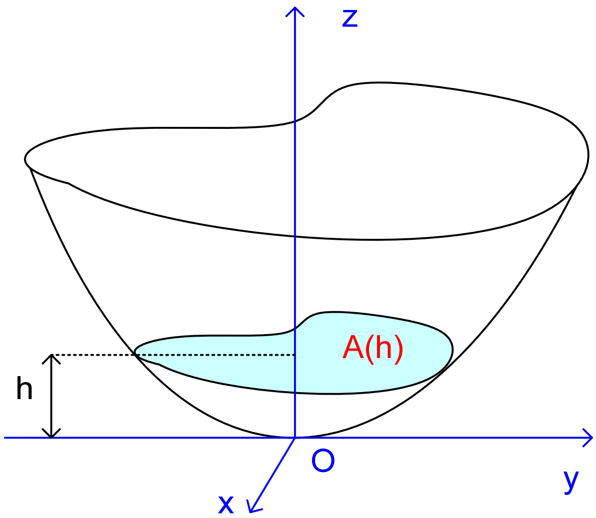
$$V_{halvklot} = \int_a^b A(z)dz = \int_0^R \pi(R^2 - z^2)dz$$

$$= \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^R = \frac{2R^3\pi}{3}$$

Därmed har hela klotet volymen $V_{klot} = 2V_{halvklot}$

dvs $V_{klot} = \dfrac{4R^3\pi}{3}$, vad skulle visas.

Uppgift 6. (Viktigt allmänt exempel.) En stor tank T fylls med vatten med hastigheten K m^3 per timme). Antag att vi känner tversnittsarean A(h) för varje snitt parallell med xy-planet (dvs vinkelrät mot z planet), se nedanstående figur . Med vilken hastighet stiger vattenytan då vattendjupet är *h*= L m (där L är mindre än tankens höjd)?



Lösning: Vi har $\dfrac{dV}{dt} = K$, vi söker $\dfrac{dh}{dt}$.

Enligt kedjeregeln

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \qquad (*) \qquad\qquad [\text{ härav } \frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dh}} .]$$

Först bestämmer vi $\dfrac{dV}{dh}$ (som vi sedan substituerar i (*) och beräknar $\dfrac{dh}{dt}$)

Enligt skivformel gäller

$V(h) = \int_a^h A(z)dz$.

Därför $\frac{d}{dh}(V(h)) = \frac{d}{dh}\int_a^h A(z)dz =$ (analysens huvudsats)= $A(h)$.

Alltså $\frac{dV}{dh} = A(h)$

Substitutionen i (*) ger $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow K = A(h) \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{K}{A(h)}$

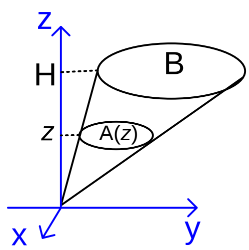
Alltså , om vattendjupet är *h*, stiger vattennivå stiger med hastigheten $\frac{dh}{dt} = \frac{K}{A(h)}$

Vid en fix höjd h=L stiger vattennivå med hastigheten $\frac{K}{A(L)}$

Svar: $\frac{K}{A(L)}$.

Uppgift 7. En kon placeras med spetsen vänd nedåt. Basen (parrallell med xy-planet) är en ellips med halvaxlar a=2m och b=3 m . Höjden är H=10m. Konen fylls med vatten med hastigheten K=0.1 m^3 /min.
Med vilken hastighet stiger vattenytan då vattendjupet är *h*=5m ?

Lösning:



Vi kan bestämma $A(h)$ och endast substituera i formeln

$$\frac{dh}{dt} = \frac{K}{A(h)}$$

från föregående uppgift, men, för att öva härledningen, upprepar vi hela resonemangen.

Enligt kedjeregeln gäller $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$.

Först bestämmer vi $\frac{dV}{dh}$ med hjälp av skivformeln $V(h) = \int_a^h A(z)dz$.

Vi har $\frac{d}{dh}(V(h)) = \frac{d}{dh}\int_a^h A(z)dz =$ (analysens huvudsats)= $A(h)$.

Alltså $\frac{dV}{dh} = A(h)$

Substitutionen i (*) ger $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}\Rightarrow K=A(h)\cdot\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{K}{A(h)}$

Alltså , om vattendjupet är *h*, stiger vattennivå stiger med hastigheten $\frac{dh}{dt}=\frac{K}{A(h)}$ (**).

I den här uppgiften är $\frac{dV}{dt}=K=0.1$. Vi kvar att bestämma $A(h)$.

Med hjälp av likformighet (i 3 dimensioner) får vi

$$\frac{A(z)}{B}=\frac{z^2}{H^2} \quad\Rightarrow\quad A(z)=\frac{z^2}{H^2}B \ , \quad \text{dvs} \ A(h)=\frac{h^2}{H^2}B$$

Eftersom basytansarea (ellipsens area) är $B=2\cdot3\pi=6\pi$ och H=10 har vi $A(h)=\frac{3h^2\pi}{50}$.

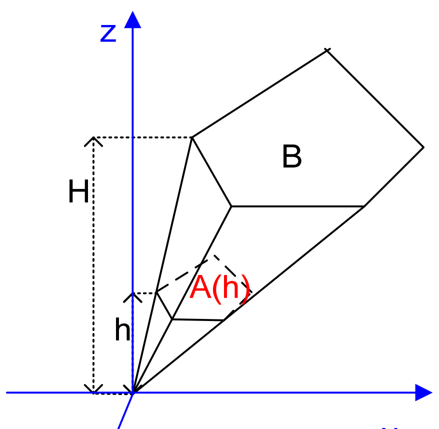
Nu, från (**), $\frac{dh}{dt}=\frac{K}{A(h)}=\frac{0.1}{\frac{3h^2\pi}{50}}=\frac{5}{3h^2\pi}$

Alltså, om vattendjupet är *h*, stiger vattennivå med hastigheten $\frac{dh}{dt}=\frac{5}{3h^2\pi}$.

Om h=5m stiger därmed vattennivå med hastigheten $\frac{5}{3\cdot5^2\pi}=\frac{1}{15\pi}$.

Svar: $\frac{1}{15\pi}$ m/min

Uppgift 8. En pyramid placeras med spetsen vänd nedåt. Basen (parrallell med xy-planet) har arean B=4 m^2. Höjden är H=5m. Pyramiden fylls med vatten med hastigheten K=0.2 m^3 /min. Med vilken hastighet stiger vattenytan då vattendjupet är *h*=2m ?



Lösning:

Vattennivå stiger med hastigheten $\frac{dh}{dt}=\frac{K}{A(h)}$ (se uppgift 6) .

Med hjälp av likformighet (i 3 dimensioner) får vi

$$\frac{A(z)}{B}=\frac{h^2}{H^2} \quad \Rightarrow \quad A(h)=B\frac{h^2}{H^2}=\frac{4h^2}{25},$$

Därför $\frac{dh}{dt}=\frac{K}{A(h)}=\frac{0.2}{\frac{4h^2}{25}}=\frac{5}{4h^2}$

Alltså, om vattendjupet är *h*, stiger vattennivå med hastigheten $\frac{dh}{dt}=\frac{5}{4h^2}$.

Om h=2m stiger därmed vattennivå med hastigheten $\frac{5}{16}$ m per minut.

Uppgift 9. (Jämför med upp 8 Tentamen 2012-12-10) En stor sfärisk tank med radien R fylls med vatten med hastigheten K m^3 per timme (se nedanstående figur).

a) Med vilken hastighet stiger vattenytan då vattendjupet är *h*= L m (där L<R)?

b) Med vilken hastighet stiger vattenytan då vattendjupet är *h*= $\frac{R}{5}$ m och K= 0,1 m^3 per timme.

Lösning: (Vi upprepar resonemangen från föregående uppgifter)

Vi har $\frac{dV}{dt}=K$, vi söker $\frac{dh}{dt}$. Enligt kedjeregeln $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$ (*)

Först bestämmer vi $\frac{dV}{dh}$ med hjälp av skivformeln .

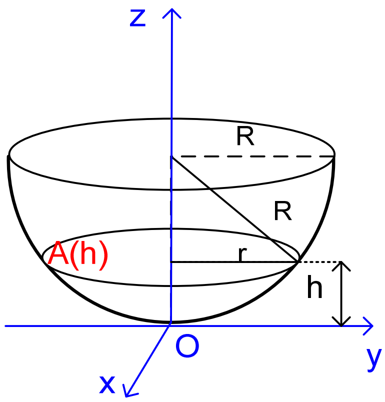
Från $V(h)=\int_a^h A(z)dz$. har vi $\frac{d}{dh}(V(h))=\frac{d}{dh}\int_a^h A(z)dz=$ (analysens huvudsats)= $A(h)$.

Alltså $\frac{dV}{dh}=A(h)$ -

Substitutionen i (*) ger $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}\Rightarrow K=A(h)\cdot\frac{dh}{dt}\Rightarrow\frac{dh}{dt}=\frac{K}{A(h)}$

Alltså , om vattendjupet är *h*, stiger vattennivå stiger med hastigheten $\frac{dh}{dt} = \frac{K}{A(h)}$

Vi har kvar att beräkna snittarean A(h).



Pytagoras sats

$r^2 = R^2 - (R-h)^2 = 2Rh - h^2$

Därför snittarean (cirkelns area) är

$A(h) = r^2\pi = (2Rh - h^2)\pi$

och därmed, om vattendjupet är *h*, stiger vattennivå med hastigheten

$$\frac{dh}{dt} = \frac{K}{A(h)} = \frac{K}{(2Rh - h^2)\pi}$$

a) Om vattendjupet är h=L, stiger vattennivå med hastigheten v1= $\frac{K}{(2RL - L^2)\pi}$

b) Vid h=R/5 stiger vattennivå med hastigheten

v2= $\frac{0.1}{(2\frac{R^2}{5} - \frac{R^2}{25})\pi} = \frac{5}{18R^2\pi}$ m per timme

Svar: a) $\frac{K}{(2RL - L^2)\pi}$ m per timme b) $\frac{5}{18R^2\pi}$ m per timme.

2. ROTATIONSVOLYMER

Uppgift 10. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området som definieras av $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le e^{4x}$ roterar kring

a) x-axeln **b)** y -axeln

Lösning:

a) Volymen av kroppen som alstras då området roterar kring *x*-axeln är

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_a^b e^{8x}dx = \left[\pi \frac{e^{8x}}{8}\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}[e^8 - 1]$$

Svar a) $\frac{\pi}{8}[e^8 - 1]$

Volymen av kroppen som alstras då området roterar kring y-axeln är

$$V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)dx = 2\pi \int_0^1 x \cdot e^{4x}dx$$

Integralen $\int x \cdot e^{4x}dx$ beräknar vi med hjälp av partiell integration

$\int x \cdot e^{4x}dx$

$uv - \int u'v\,dx = x\frac{e^{4x}}{4} - \int \frac{e^{4x}}{4}dx$

$= x\frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16}$

Partiell integration:

$u = x$, $v' = e^{4x}$

$u' = 1,$ $v = \frac{e^{4x}}{4}$

Därför

$V_y = 2\pi \int_0^1 x \cdot e^{4x}dx = 2\pi \left[x\frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16}\right]_0^1 = \frac{3\pi e^4}{8} + \frac{\pi}{8}$

Svar b) $\frac{3\pi e^4}{8} + \frac{\pi}{8}$

Uppgift 11. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området som begränsas av kurvorna av $y = x^4$ och $y = x$ roterar kring x-axeln.

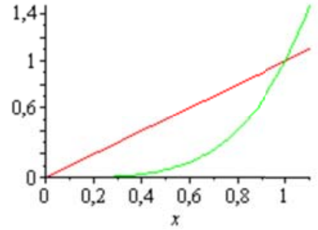
Lösning:

$V_x = V_2 - V_1$

där $V_2 = \pi \int_a^b x^2 dx = \left[\pi \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$

och $V_1 = \pi \int_a^b x^8 dx = \left[\pi \frac{x^9}{9}\right]_0^1 = \frac{\pi}{9}$.

Nu har vi $V_x = V_2 - V_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{9}$



Svar a) $V_x = \frac{2\pi}{9}$

Uppgift 12. Kurvan $y = \sin x$ begränsar tillsammans med x-axeln ett område i intervallet $0 \le x \le \pi$. Beräkna volymen av den kropp som alstras då området roterar

a) kring x-axeln b) kring y-axeln

Lösning:

a) $Vx = \pi\int_0^\pi (\sin x)^2 dx = \pi\int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi = \pi(\frac{\pi}{2} - 0 - (0-0)) = \frac{\pi^2}{2}$ *v.e.*

b) $Vy = 2\pi\int_0^\pi x\sin x dx = [\text{partiell integration}].$

$$= \quad 2\pi[-x\cos x + \sin x]_0^\pi = 2\pi^2 \ v.e$$

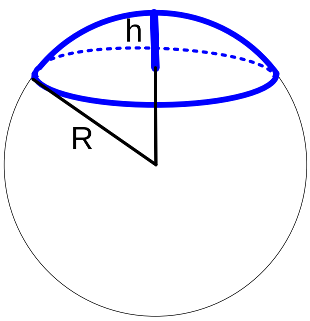
Uppgift 13. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området som definieras av $1 \le x \le \infty$, $0 \le y \le \frac{1}{x^2}$ roterar kring x-axeln.

Lösning:

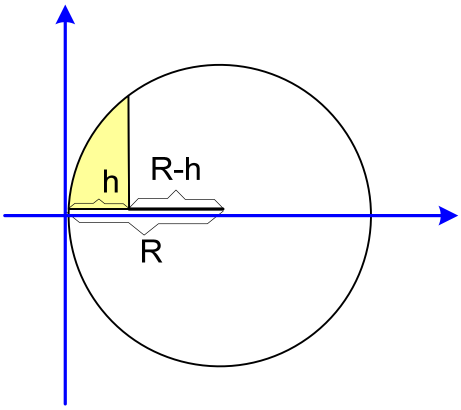
$$\boldsymbol{V_x} = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_1^\infty \frac{1}{x^4}dx = \left[-\pi\frac{1}{3x^3}\right]_1^\infty = 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

Svar a) $\boldsymbol{V_x} = \frac{\pi}{3}$

Uppgift 14. Beräkna volymen av klotets segment med ”höjden” h (se figur) då klotens radien är lika med R.



Lösning: För att beräkna på enklare sätt betraktar vi ett ekvivalent problem. Vi beräknar rotationsvolymen som uppstår då hälften av cirkelsegment i figuren nedan, roterar kring x axeln.



Från cirkelns ekvation $(x-R)^2 + y^2 = R^2$ har vi

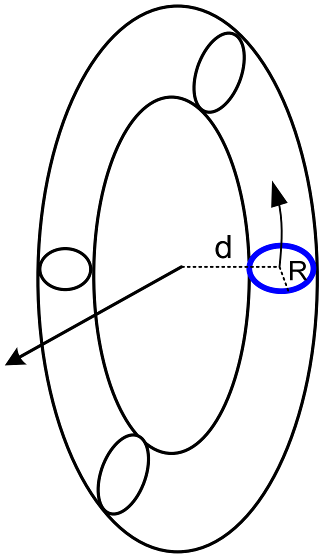
$y^2 = R^2 - (x-R)^2 = 2Rx - x^2$ som vi substituerar i formeln

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_0^h (2Rx - x^2)dx =$$

$$\pi\left[Rx^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi\left[Rh^2 - \frac{h^3}{3}\right] = \frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$$

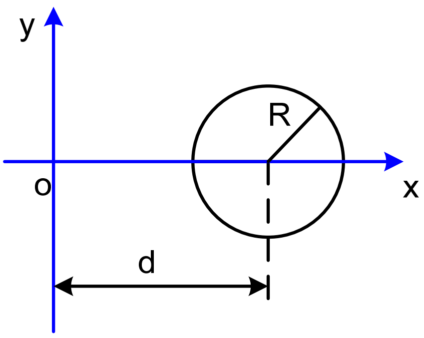
Svar: V $= \dfrac{\pi h^2}{3}(3R-h)$

Uppgift 15. Beräkna volymen av kroppen som uppstår då cirkeln med radien R roterar kring en axeln där avståndet mellan cirkelns centrum och axeln är d > R. (Kroppen kallas **torus** och liknar en cykelslang)



Lösning:

Vi betraktar rotation kring y-axeln och placerar cirkelns centrum på x axeln i punkten (d,0).



Från cirkelns ekvation $(x-d)^2 + y^2 = R^2$ har vi $y^2 = R^2 - (x-d)^2$

Först beräknar vi volymen V_y då cirkelns övre halvan $y = +\sqrt{R^2 - (x-d)^2}$ roterar kring y-axeln.

Torusvolymen blir då $V_{torus} = 2 \cdot V_y$

Vi har $V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)dx = 2\pi \int_{d-R}^{d+R} x \cdot \sqrt{R^2 - (x-d)^2}\,dx$

Substitution : $x - d = t$, $dx = dt$

$$V_y = 2\pi \int_{-R}^{R} (t+d) \cdot \sqrt{R^2 - t^2}\,dx =$$

$$= 2\pi \int_{-R}^{R} t \cdot \sqrt{R^2 - t^2}\, dx + 2\pi\ d \cdot \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - t^2}\, dx$$

$$= 0 + 2\pi\ d \cdot \frac{R^2 \pi}{2} = R^2 \pi^2 d$$

Förklaring:

i) Första integralen är 0 eftersom detta är integral av en udda funktion ($f(-t) = -f(t)$) över intervallet $[-R, \quad R]$ som är symmetriskt kring origo. (Man kan om man vill beräkna integralen t ex med variabelbyte $R^2 - t^2 = v$)

ii) Den andra integralen $\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - t^2}\, dx = \frac{R^2 \pi}{2}$ eftersom den beskriver arean av halvcirkeln med radien R . (Man kan även direkt beräkna integralen t ex med variabelbyte $t = R \sin u$)

Till slut $V_{torus} = 2 \cdot V_y = 2R^2 \pi^2 d$

Svar. $V_{torus} = 2R^2 \pi^2 d$