Crash Course Envarre2- Maclaurinutvecklingar

Mattehjälpen

Maj 2018

Contents

1 Maclaurinutveckling

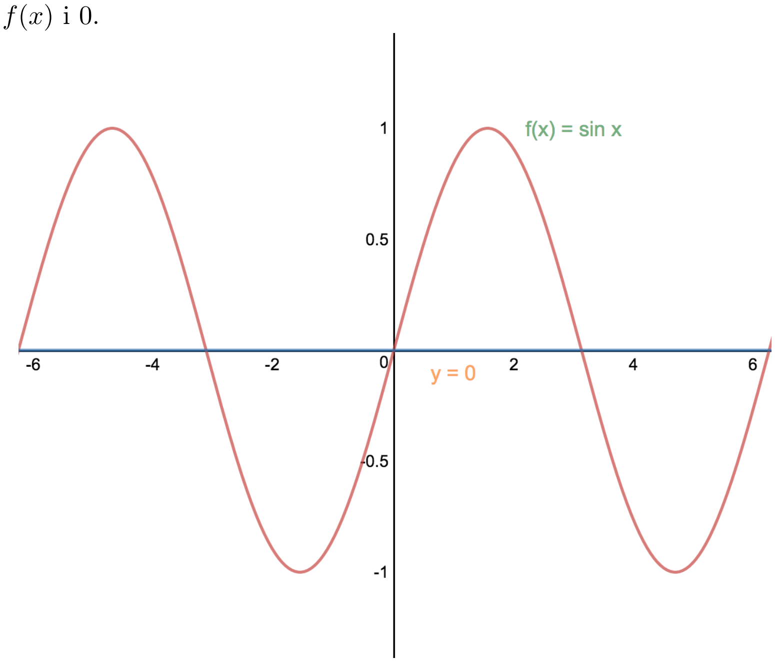
På denna föreläsning ska vi kika på hur formeln för en maclaurinutveckling ser ut och kortfattat motivera varför den ser ut som den gör. Sen ska vi träna på att ta fram maclaurinutvecklingar och använda dem för att

- Beräkna gränsvärden
- Avgöra om en funktion har en lokal max- eller minimipunkt för något givet x-värde
- Göra numeriska approximationer av svårberäknade tal, tex $\sqrt{26}$

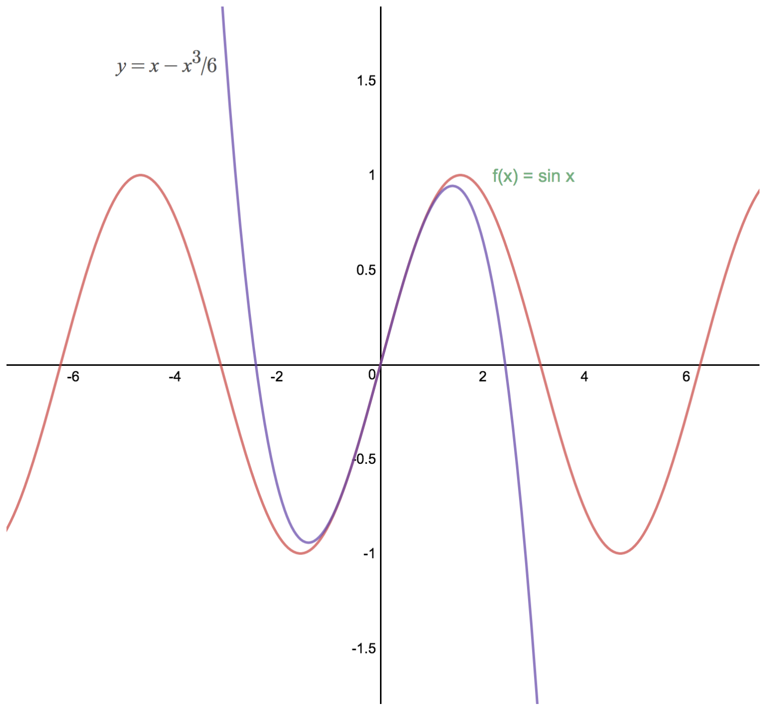
När man pratar om maclaurinutvecklingen för en funktion är det underförstått att den gäller kring $x = 0$. Du kan se en maclaurinutveckling som en omskrivning av en funktion med ett polynom och en restterm. Om man gör en liknande utveckling kring något annat x-värde kallas det att man gör en *taylorutveckling*. Anledningen till att man vill skriva om funktioner mha polynom är för att polynom är lätta att räkna med, särskilt i datorer. Formeln för maclaurinutveckling av ordning n för en funktion ser ut enligt följande:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r(x) \tag{1}$$

Så varför ser formeln ut enligt ovan? Vi börjar med att tänka att vi bara ska göra en approximation till en funktion mha av ett polynom och vi tar sikte på att polynomet ska vara en bra approximation särskilt kring $x = 0$. Låt nu $f(x) = \sin x$. En mindre bra approximation till $f(x)$ är en horisontell linje som har samma funktionsvärde som $f(x)$ i 0.



Vi ser att då vi kommer en bit ifrån $x = 0$ blir approximationen väldigt dålig. En bättre approximation till $f(x) = \sin x$ fås om vi också ser till att polynomet vi approximerar med har samma förstaderivata som $f(x)$ i $x = 0$. Med samma resonomang inser man att ju fler derivator i $x = 0$ vi ser till att $f(x)$ och vårt polynom har lika, desto bättre kommer approximationen att bli. Det poynom vi approximerar funktionen med kallas för *maclurinpolynomet*. Nedan kan du se en graf över $f(x) = \sin x$ och maclaurinpolynomet av ordning 3.



För att få maclaurinutvecklingen till $\sin x$ behöver vi lägga till en funktion $r(x)$ till maclaurinpolynomet som kompenserar för felet som uppstår då vi approximerar. För $\sin x$ kommer det visa sig att om man låter gradtalet n på maclaurinpolynomet $\to \infty$ så kommer felet $r(x) \to 0$ och man får då det som kallas för en maclaurinserie. Detta sista är dock lite att gå händelserna i förväg så vi tar och lägger det på is tills vidare.

Resttermen $r(x)$ i (1) korrigerar som sagt för felet som fås då vi försöker approximera $f(x)$ med ett polynom. Beroende på tillämpning så skrivs restermen $r(x)$ på olika sätt men vanligtvis brukar man skriva den enligt nedan, på *Ordo-form*.

$$r(x) = \mathcal{O}(x^{n+1}) = x^{n+1}b(x), \text{ där } b(x) \text{ är någon begränsad funktion.}$$

Det är viktigt att känna till att $\mathcal{O}(x)$ är en förkortning för x multiplicerad med en begränsad funktion för det innebär att $\lim_{x \to 0} \mathcal{O}(x) = 0$. Detta kommer användas väldigt mycket i gränsvärdesberäkningar.

En räkneregel för $\mathcal{O}$ som många ofta reagerar på visas nedan med ett exempel.

$$\mathcal{O}(x^3) + \mathcal{O}(x^4) = \mathcal{O}(x^3)$$

Tänk på att vi nu studerar x nära 0 och för dessa x-värden så är $\mathcal{O}(x^3)$ mer betydelsefull än $\mathcal{O}(x^4)$ ty x^4 avtar snabbare än x^3 då x är litet. Därför är det mer rimligt att den som är liten och betydelselös 'slukas' av den som är förhållandevis stor. Matematiskt kan man motivera räkneregeln enligt följande

$$\mathcal{O}(x^3) + \mathcal{O}(x^4) = x^3 b_1(x) + x^4 b_2(x) = x^3 \underbrace{(b_1(x) + x b_2(x))}_{b_3(x)} = x^3 b_3(x) = \mathcal{O}(x^3) \tag{2}$$

Där $b_3(x)$ i (2) blir en ny begränsad funktion.

Ett alternativt sätt som resttermen kan skrivas på är på *Lagrange form* som

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ där } \beta \text{ är något tal mellan 0 och } x. \tag{3}$$

Mer om resttermen på Lagrange form senare i dokumentet. Nedan ser du maclaurinutvecklingen av $\cos x$ av ordning 2 respektive 3.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \quad \text{(ordning 2)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) \quad \text{(ordning 3)}$$

Här presenterar sig en intressant egenskap. Maclaurinpolynomet för $\cos x$ är alltså detsamma både för en utveckling av ordning 2 och 3, och det är så pga att maclaurinutvecklingen för en jämn funktion endast kommer ha x med jämn exponent i sin utveckling, plus eventuellt någon konstant. Omvänt gäller också, om funktionen vi maclaurinutvecklar är udda, då kommer maclaurinpolynomet endast innehålla x med udda exponent. Utöver detta gäller att om en funktion är udda/jämn så kommer dess invers att vara udda/jämn och därmed gäller att maclaurinutvecklingen för inversen till en udda funktion också bara kommer innehålla x med udda exponent. Ett mer konkret exempel på när detta kan användas kommer längre ner i dokumentet. Innan vi går vidare så är en rimlig fråga att ställa sig ifall det spelar det här spelar någon roll om vi utvecklar $\cos x$ till ordning 2 eller 3? Svaret som vi kan ge är, troligtvis inte. En maclaurinutveckling av högre ordning anses vara bättre och därmed så brukar man i såna här fall välja att ta utvecklingen av så hög ordning som möjligt. I detta fall bör vi alltså välja att utveckla $\cos x$ till ordning 3, så att vi får en restterm som är $\mathcal{O}(x^4)$.

Exempel: Gör en maclaurinutveckling till ordning 3 av e^x med resttermen på ordo-form.

Eftersom derivatan av $f(x) = e^x$ är $f'(x) = e^x$ så blir det nog inte lättare än så här. Vi använder formeln för maclaurinutveckling och får

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)$$

Nästa grej som är bra att känna till om maclaurinutvecklingar är att givet att en funktion uppfyller ett visst villkor så kan du ersätta x i standardutvecklingen med denna funktion för att på ett snabbt och smidigt sätt få fram en maclaurinutveckling som med formeln hade varit jobbig att beräkna. Vi visar med ett exempel.

Låt säga att vi vill ta fram vad maclaurinutvecklingen av ordning 5 är för $f(x) = e^{x^2}$. Ett alternativ är att derivera $f(x)$ fem gånger och mha formeln för MU härleda vad den blir. Derivatorna blir dock snabbt väldigt jobbiga att beräkna för hand och det hade varit toppen om det finns något mer effektivt sätt att få fram denna utveckling på. Det är välkänt vad standardutvecklingen för e^t är och det vi ska göra nu är att istället för att låta $t = x$ så låter vi $t = x^2$. Det fungerar att göra på detta sätt givet att $\lim_{x\to 0} t = 0$. I detta fall gäller att $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, så då är det okej att stoppa in x^2 i standardutvecklingen. Det hade även varit okej att stoppa in $x^2 - 3x$, men det hade *inte* varit okej att stoppa in $3x - 1$.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \mathcal{O}(t^6) \Rightarrow e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \mathcal{O}(x^{12})$$
$$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)$$

Det blir väldigt mycket smidigare att göra enligt ovan istället för att sitta och kämpa med att beräkna femtederivatan av e^{x^2} (som f.ö. är $120e^{x^2}x + 32e^{x^2}x^5 + 160e^{x^2}x^3$).

Exempel: Beräkna maclaurinutvecklingarna av ordning 3 för $e^{\sin x}$ och $e^{\cos x}$, med restterm på ordo-form.

Vi börjar med att kika på $e^{\sin x}$. Viktigt att notera här är att $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, det betyder att det är okej att stoppa in $t = \sin x$ i MU för e^t, och därmed också maclaurinutvecklingen för $t = \sin x$ i e^t. Med anledning av det, utveckla $t = \sin x$ till ordning 3 och stoppa sedan in denna i 3 ordningens MU av e^t.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \mathcal{O}(t^4),\ t = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5) \Rightarrow$$
$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^5)\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^3}{6} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^4\right)}_{\mathcal{O}(x^4)}$$

I det sista steget ovan skrivs den långa ordo-termen om till $\mathcal{O}(x^4)$ och sättet man ska tänka på för att få fram det är att kolla vad det lägsta gradtalet på en term kommer bli vid utvecklingen av det som står innanför ordot. I detta fall blir det x^4. När väl det är konstaterat är det läge att fortsätta förenkla uttrycket. Alla termer med gradtal ≥ 4 (ink. alla $\mathcal{O}(x^m)$ där $m \geq 4$) kommer att 'slukas' av $\mathcal{O}(x^4)$. Efter en del förenkling fås

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \left(\frac{x^2}{6}\right) + \left(\frac{x^3}{6}\right) + \mathcal{O}(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$$

För att bestämma MU för $\cos x$ är lösningsgången snarlik men det finns en grej som man måste göra annorlunda. Observera att om vi sätter $t = \cos x$ så gäller att $\lim_{x\to 0} t = 1 \neq 0$. Därmed, för att kunna göra motsvarande trick som ovan, måste en korrigering göras. Välj $t = \cos x - 1$ och problemet är löst. För att få till detta i praktiken behöver en omskrivning göras.

$$e^{\cos x} = e^{\cos x - 1 + 1} = e^{\overbrace{\cos x - 1}^{t}} \cdot e^1 = e^{-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)} \cdot e^1$$

Resten av uppgiften lämnas som övning men det korrekta svaret följer nedan.

$$e^{\cos x} = e - \frac{ex^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$$

Exempel: Beräkna MU av ordning 3 för $\sqrt{1+\arctan x}$, med restterm på ordo-form.

Till att börja med noterar vi att funktionen som vi ska bestämma MU för kan skrivas som $(1+\arctan x)^{1/2}$. Det vi nu ska göra är att ta fram MU för $\arctan x$ och sedan stoppa in den i en standardutveckling av $(1+t)^{1/2}$. För att det ska bli rätt är det viktigt att vi gör *alla* utvecklingar till åtminstone ordning 3.

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{t}{2} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}t^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{6}t^3 + \mathcal{O}(t^4) = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + \mathcal{O}(t^4)$$

Välj sen $t = x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)$ och stoppa in i utvecklingen för $(1+t)^{1/2}$.

$$1 + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)\right)}{2} - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)\right)^2}{8} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)\right)^3}{16} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)\right)^4\right)}_{\mathcal{O}(x^4)}$$

Som vanligt gäller vid förenkling att alla termer med gradtal ≥ 4 'slukas' av $\mathcal{O}(x^4)$. Slutligen fås

$$\sqrt{1+\arctan x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{5x^3}{48} + \mathcal{O}(x^4)$$

Exempel: Gör en maclaurinutveckling sv ordning 3 för $e^x \cdot \cos x$ med restterm på ordo-form.

Skriv om både e^x och $\cos x$ som var sin MU av ordning 3 och multiplicera sedan ihop dessa.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$$

$$e^x \cdot \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^4)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)\right)$$

Utför multiplikationen. Alla termer med gradtal ≥ 4 'slukas' av $\mathcal{O}(x^4)$.

$$e^x \cdot \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = 1 + x - \frac{2x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4) = 1 + x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)$$

2 Beräkna maclaurinutveckling för invers

Vi visar hur man gör detta genom att kika på ett exempel.

Exempel: Visa att $f(x) = xe^{x^2}$ är inverterbar och bestäm MU för $f^{-1}(x)$, med restterm $\mathcal{O}(x^7)$.

En funktion är inverterbar om det till varje y-värde endast finns ett x-värde. En kontinuerlig funktion som för alla x-värden är strängt växande/avtagande är inverterbar. Om vi deriverar $f(x)$ fås

$$f'(x) = e^{x^2} + xe^{x^2} \cdot 2x = \underbrace{e^{x^2}}_{>0}\underbrace{(1 + 2x^2)}_{>0} > 0, \text{ för alla } x \in \mathbb{R}$$

Eftersom $f'(x) > 0$ för alla reella x och $f(x)$ är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$ så betyder det att $f(x)$ har en invers. För denna typ av uppgift är det också viktigt att ha koll på vad en udda/jämn funktion är. En funktion $g(x)$ är udda om det gäller att $g(-x) = -g(x)$. $g(x)$ är jämn om det gäller att $g(-x) = g(x)$. Ett typiskt exempel på en udda funktion är $\sin x$ och ett par typiska exempel på en jämn funktion är x^2 och $\cos x$. I detta fall noterar vi att $f(x)$ är en udda funktion ty

$$f(-x) = (-x)e^{(-x)^2} = -xe^{x^2} = -f(x)$$

Om en funktion är udda gäller det att dess maclaurinutveckling endast innehåller x med udda exponenter. För en udda funktion gäller också att $f^{-1}(x)$ är udda. I och med att inversen är udda innehåller dess maclaurinutveckling också endast x med udda exponenter. Vi kan nu göra en ansats för hur inversen ser ut.

$$f^{-1}(x) = c_1x + c_3x^3 + c_5x^5 + \mathcal{O}(x^7) \tag{4}$$

Ta sen fram MU för $f(x)$ på valfritt sätt, förslagsvis genom att ta fram MU för e^{x^2} först och sen multiplicera den med x. Då får man

$$f(x) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + \mathcal{O}(x^7)$$

Därefter så utnyttjar man att $f^{-1}(f(x)) = x$ för att identifiera vad koefficienterna för x, x^3 och x^5 ska vara i den ansats som har gjorts i (4). Observera att det är MU för $f(x)$ som vi ska stoppa in i det nyss givna sambandet.

$$f^{-1}(\underbrace{x + x^3 + \frac{x^5}{2} + \mathcal{O}(x^7)}_{f(x)}) = c_1 f(x) + c_3(f(x))^3 + c_5(f(x))^5 + \mathcal{O}(x^7) =$$

$$c_1\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + \mathcal{O}(x^7)\right) + c_3\underbrace{\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + \mathcal{O}(x^7)\right)^3}_{G} + c_5\left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + \mathcal{O}(x^7)\right)^5 + \mathcal{O}(x^7) =$$

$$c_1 x + c_1 x^3 + \frac{c_1}{2}x^5 + c_3 x^3 + \underbrace{3}_{*} c_3 x^5 + c_5 x^5 + \mathcal{O}(x^7) = x$$

Trean som markerats med * kommer ifrån att det finns tre olika sätt att få x^5 på då vi beräknar G. Ett sätt är att från första parentesen ta x, från andra x och från tredje x^3. Ett annat vore genom att ta x^3 från första, x från andra och tredje. Sen kan man även välja att ta x^3 från den andra parentesen och x från de övriga.

Nästa steg är att identifiera koefficienter i höger och vänster led så därför omorganiserar vi termerna.

$$x \cdot \underbrace{c_1}_{=1} + x^3 \cdot (\underbrace{c_1 + c_3}_{=0}) + x^5 \cdot (\underbrace{c_1/2 + 3c_3 + c_5}_{=0}) + \mathcal{O}(x^7) = x \tag{5}$$

För att det ska finnas en chans att likhet gäller i (5) måste följande gälla

$$\begin{cases} c_1 & & & & & = & 1 \\ c_1 & + & c_3 & & & = & 0 \\ c_1/2 & + & 3c_3 & + & c_5 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 & = & 1 \\ c_3 & = & -1 \\ c_5 & = & 5/2 \end{cases}$$

Alltså gäller det att maclaurinutvecklingen för $f^{-1}(x)$ är

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + \mathcal{O}(x^7)$$

3 Taylorutveckling

En taylorutveckling kan man i princip säga är en generalisering av maclaurinutvecklingen. Tanken är här att vi vill skriva om en funktion $f(x)$ mha ett polynom kring något godtyckligt x-värde, $x = a$. Resonemanget för härledningen av formeln är identiskt med det för maclaurinutvecklingen, med enda skillnaden att vi nu ska utveckla funktionen kring $x = a$. Man kan givetvis se en maclaurinutveckling som en taylorutveckling där $a = 0$.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \underbrace{\mathcal{O}((x-a)^4)}_{*}$$

Notera vid * att det står $\mathcal{O}((x-a)^4)$, det måste det göra för att resttermen ska gå mot noll då $x \to a$. Det vore alltså helt fel att skriva $\mathcal{O}(x^4)$ där.

Exempel: Beräkna taylorutvecklingen av $f(x) = e^{2x}$ av ordning 3 kring $x = 2$, med restterm på ordo-form.

Vi börjar med att beräkna nödvändiga derivator.

$$f'(x) = 2e^{2x},\ f''(x) = 4e^{2x},\ f'''(x) = 8e^{2x}$$

Därefter är det bara stoppa in $a = 2$ i formeln för taylorutveckling och räkna ut vad man får.

$$e^{2x} = e^4 + 2e^4(x-2) + 2e^4(x-2)^2 + \frac{4}{3}e^4(x-2)^3 + \mathcal{O}((x-2)^4)$$

4 Beräkna gränsvärden

Då vi beräknar gränsvärden vill vi skriva resttermen på ordo-form. Detta på grund av att vi inte är intresserade av att veta hur stort felet är då vi approximerar långt bort ifrån $x = 0$ utan vi vill endast uttrycka funktionen på ett mer lätthanterligt sätt för x nära 0. Vi förklarar den generella lösningsgången samtidigt som vi tittar på några exempel. Till tentan är det nödvändigt att kunna alla maclaurinutvecklingar utan till så om du inte känner dig säker på alla dessa i dagsläget så se till att lära dig dem så snart som möjligt. Att kunna dem "by heart" gör det även lättare att se vad som ska utvecklas, och hur långt, då gränsvärden beräknas.

Exempel: Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$

Notera här att vi har ett gränsvärde då $x \to 0$, det betyder att vi kan maclaurintveckla om vi så önskar. Den som kan sina maclaurinutvecklingar ser också att vi kommer behöva utveckla e^x till åtminstone ordning 2, eftersom $-1-x$ kommer ta ut den första delen av e^x maclaurinutveckling, och man vill aldrig ha kvar något som kommer sluta upp som $\mathcal{O}(1)$ efter förenkling. Sen brukar ett bra tips vara att utveckla tillräckligt långt i täljaren så att du åtminstone har samma gradtal på täljarpolynomet som nämnarpolynomet. I detta exempel har vi ett polynom av grad 2 i nämnaren och med anledning av det kommer det räcka att utveckla till ordning 2 i täljaren också. Observera att man kan utveckla för kort, men du kan ej utveckla för långt. Om man utvecklar för kort (och det får konsekvenser för resultatet) kan du se det som att du har gjort en för grov approximation när du approximerar funktionen med maclaurinpolynomet. Vi avslutar detta exempel med att redovisa de faktiska beräkningarna.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1+x+\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^3)}^{e^x}-1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\mathcal{O}(x)\right) = \frac{1}{2}$$

ty $\mathcal{O}(x) \to 0$ då $x \to 0$.

Exempel: Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x+\ln(1+x)-1-x}{e^x-1-x}$

Likt i de flesta exempel där gränsvärdesberäkningar ska göras blir det betydligt lättare att avgöra hur långt man ska utveckla om man kan sina standardutvecklingar. Målet är att efter utveckling ha ett gradtal i täljaren som är större än eller lika med gradtalet på polynomet i nämnaren. För $\cos x$ har man en $+1$ i början och denna kommer tas ut av -1 i täljaren. $\ln(1+x)$ börjar sin utveckling med ett x och detta kommer tas ut av $-x$ i täljaren. I nämnaren ser vi att vi måste utveckla e^x till åtminstone ordning 2, för annars får vi bara en ordoterm kvar i nämnaren, och det vill vi inte ha. Utifrån det vi konstaterat ovan är det rimligt att testa att utveckla till ordning 2 i både täljare och nämnare. Skulle det visa sig vara otillräckligt, dvs man får något skumt resultat, då är det bara börja om och utveckla lite längre.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\ln(1+x)-1-x}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^4)+x-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^3)-1-x}{1+x+\frac{x^2}{2}-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2+\mathcal{O}(x^3)}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}-1+\mathcal{O}(x)=-1$$

ty, $\mathcal{O}(x)\to 0$ då $\to 0$.

De exempel som hitintills har gåtts igenom kan definitivt anses vara "enkla" men de illustrerar dem principer man behöver förstå för att senare kunna tackla svårare problem.

Exempel: Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\ln(1+2x+2x^2)-2x}{\arctan(x^3)}}_{J}$

Skriv om J med hjälp av MU:

$$\begin{aligned}\ln(1+2x+2x^2)&=\Big/ u=2x+2x^2 \text{ (viktigt att } \lim_{x\to 0}u=0)\Big/=\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\mathcal{O}(u^4)=\\&=(2x+2x^2)-\frac{1}{2}(2x+2x^2)^2+\frac{1}{3}\underbrace{(2x+2x^2)^3}_{G}+\underbrace{\mathcal{O}((2x+2x^2)^4)}_{=\mathcal{O}(x^4)}=\\&=2x+2x^2-\frac{1}{2}(4x^2+8x^3+\underbrace{4x^4}_{*})+\frac{1}{3}(\underbrace{2x}_{**})^3+\mathcal{O}(x^4)=2x-4x^3+\frac{8x^3}{3}+\mathcal{O}(x^4)=\\&=2x-\frac{4x^3}{3}+\mathcal{O}(x^4)\end{aligned}$$

$$\arctan(x^3)=\big/t=x^3\big/=\arctan(t)=t+\mathcal{O}(t^3)=x^3+\mathcal{O}(x^9)$$

Därefter förenklar vi och beräknar gränsvärdet

$$\begin{aligned}J&=\frac{2x-\frac{4x^3}{3}+\mathcal{O}(x^4)-2x}{x^3+\mathcal{O}(x^9)}=\frac{-\frac{4x^3}{3}+\mathcal{O}(x^4)}{x^3+\mathcal{O}(x^9)}=\frac{x^3(-\frac{4}{3}+\mathcal{O}(x))}{x^3(1+\mathcal{O}(x^6))}=\\&=\frac{-\frac{4}{3}+\mathcal{O}(x)}{1+\mathcal{O}(x^6)}\to-\frac{4}{3} \text{ då } x\to 0 \text{ ty } \mathcal{O}(x) \text{ och } \mathcal{O}(x^6)\to 0 \text{ då } x\to 0\end{aligned}$$

5 Avgöra om det finns lokal extrempunkt

Ibland blir man ombedd att avgöra om en funktion har en lokal extrempunkt för något särskilt x-värde, oftast $x = 0$ men låt oss hålla det generellt så vi säger för $x = a$. Dvs, det som ska undersökas är om $f(a)$ är störst eller minst i en omgivning till $x = a$.

Exempel: Avgör om $g(x) = \ln(1 + 2x + 2x^2) - 2x$ har en lokal extrempunkt i $x = 0$.

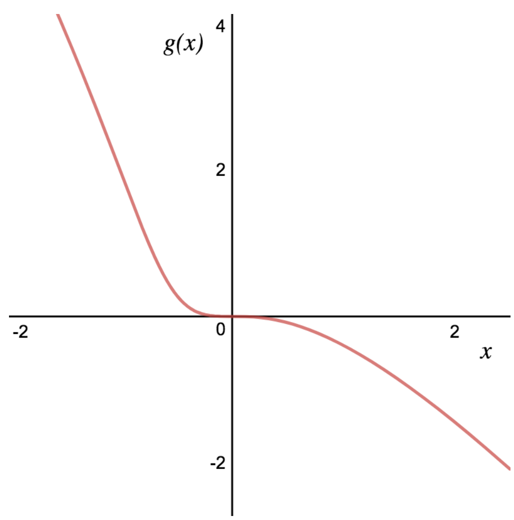
Tanken är nu att vi ska göra en maclaurinutveckling av ln-termen i $g(x)$ och sedan utifrån utseendet på $g(x)$ avgöra om funktionen har en lokal extrempunkt i $x = 0$. Från exemplet ovan har vi

$$\ln(1 + 2x + 2x^2) = 2x - \frac{4x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4)$$

Och det medför att $g(x)$ kan skrivas

$$g(x) = 2x - \frac{4x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) - 2x = -\frac{4x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) = x^3 \underbrace{\left(-\frac{4}{3} + \mathcal{O}(x)\right)}_{A}$$

Notera nu att då $x \to 0$ så går A mot $-4/3$, dvs ett negativt tal. Om vi däremot kikar på den andra faktorn i $g(x)$ som är x^3 så ser vi att den kommer ha olika tecken beroende på om x närmar sig 0 från höger eller vänster. Om x närmar sig noll från vänster gäller att $x^3 < 0$ och om x närmar sig 0 från höger gäller att $x^3 > 0$. Detta får konsekvenser för vilket värde $g(x)$ får. Lite mer konkret betyder det att för negativa x-värden nära 0 så kommer $g(x)$ vara positiv (ty det blir "minus gånger minus") och för positiva x-värden nära 0 kommer $g(x)$ vara negativ. Därmed så finns ingen lokal extrempunkt i $x = 0$. Nedan ser du grafen till $g(x)$.



Tänk dig nu istället att vi har en annan snarlik funktion $h(x)$.

$$h(x) = x^4 \left(-\frac{4}{3} + \mathcal{O}(x)\right)$$

För $h(x)$ hade det gällt att funktionen har en lokal extrempunkt i $x = 0$ ty oavsett vilket x-värde nära 0 vi väljer så får vi ett negativt värde på $h(x)$. I $x = 0$ är funktionsvärdet 0 och därmed har vi en maximipunkt där. En regel man kan komma ihåg är att om exponenten för det x som är utbrutet är ett jämnt tal, då finns en lokal extrempunkt, annars inte.

6 Lagranges restterm

När resttermen skrivs på Lagrange form ser man den oftast som

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ där } \beta \text{ är något tal mellan 0 och } x.$$

Observera att det är väldigt viktigt att skriva 'β mellan 0 och x' och inte $0 \leq \beta \leq x$ då x kan vara ett negativt tal. Lagrange restterm brukar upplevas som rätt knepig och jobbig att räkna med men egentligen är det inte så knepigt. Typiskt sett är uppgiften att ange ett approximerat numeriskt värde på något som är svårt (läs potentiellt omöjligt) att beräkna analytiskt, och felet i jämförelse med det sanna värdet måste vara mindre än något specificerat tal. Att göra själva approximationen är enkelt och är sällan det som ställer till problem. Problemet är oftast att verifiera att givet att en viss approximation görs så blir felet tillräckligt litet.

Vi har tidigare nämnt att man genom att göra en MU av en funktion $f(x)$ skriver om den enligt följande

$$f(x) = \underbrace{p(x)}_{\text{Approximation}} + \underbrace{r(x)}_{\text{Fel}}$$

Exempel: Approximera $\sqrt{26}$ med ett fel $< \frac{1}{1000}$.

Börja med att skriva om $\sqrt{26}$ på ett sådant sätt som gör att en MU kan användas.

$$\sqrt{26} = \sqrt{25+1} = 5\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{25}}}_{G}$$

Utifrån hur G ser ut är det rimligt att låta $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$. Vi ska med hjälp av MU för $f(x)$ uppskatta det numeriska värdet på $\sqrt{26}$.

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \underbrace{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}}_{approximation} + \underbrace{\frac{f^{(3)}(\beta)}{3!}x^3}_{Fel}, \ \beta \text{ mellan 0 och x.}$$

Kommentar: Vi måste komma ihåg att i slutet multiplicera både fel och approximation med 5.

Undersök först om vi utvecklat tillräckligt långt för att felet ska bli tillräckligt litet för om detta inte är uppfyllt spelar det ingen roll vad approximationen blir, då måste vi ändå göra om den. Derivera f tre gånger:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad , \quad f''(x) = \frac{-1}{4(1+x)^{3/2}} \quad , \quad f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

$$f'''(\beta) = \frac{3}{8(1+\beta)^{5/2}} \quad , \beta \text{ mellan } 0 \text{ och } x \text{ där } x = \frac{1}{25}$$

Välj β i givet intervall så att felet blir så stort som möjligt. Detta för att om vi kan visa att det största möjliga felet är mindre än den specificerade gränsen, då kan vi vara säkra på att approximationen blir tillräckligt bra. I det här fallet väljer vi $\beta = 0$ för att göra nämnaren så liten som möjligt.

$$f'''(\beta) \leq \frac{3}{8(1+0)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

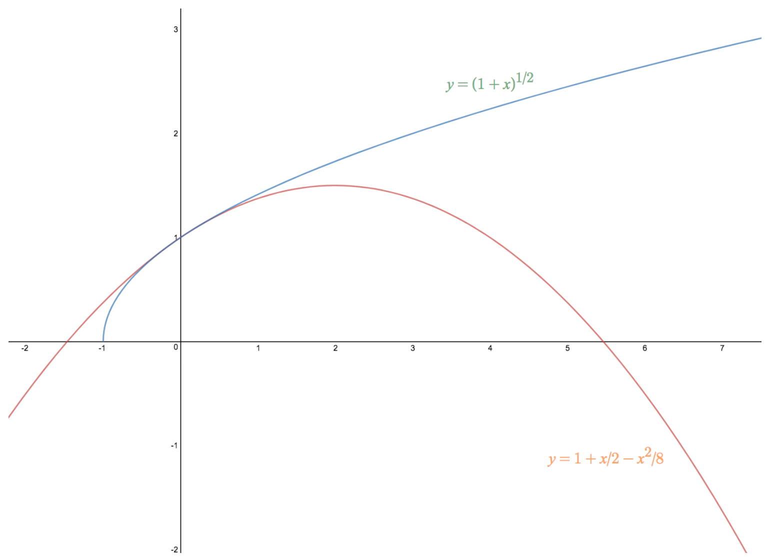
Detta ger i sin tur felet:

$$5 \cdot r\left(\frac{1}{25}\right) \leq \frac{5 \cdot \frac{3}{8}}{3!} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^3 = \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{25^3} = \frac{5}{16 \cdot 12625} \leq \frac{1}{1000} \implies \text{OK!}$$

Vår approximation blir därmed:

$$\sqrt{26} \approx 5 \cdot p\left(\frac{1}{25}\right) = 5\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 25} - \frac{1}{8 \cdot 25^2}\right) = \frac{5099}{1000}$$

Kommentar: Observera att det *inte* hade fungerat bra att skriva om $\sqrt{26} = \sqrt{1+25} = (1+25)^{1/2}$ och sedan göra på liknande sätt fast vi räknar med $x = 25$ istället för $x = 1/25$ i slutet. Anledningen till det kan ses i grafen nedan. Där visas $y = \sqrt{1+x}$ och $y = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, där den senare funktionen motsvarar maclaurinpolynomet vi approximerar med.



Det som indikeras i grafen ovan är att denna approximation endast är bra då $|x| < 1$. Senare i kursen visar man att denna approximation är bra för $-1 < x \leq 1$.

Exempel:

Bestäm ett närmevärde för längden av kurvan $y = \ln x, 5 \leq x \leq 10$ så att felet är mindre än $\frac{1}{1000}$.
Formeln för att räkna ut kurvlängden:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$

Vi får alltså:

$$S = \int_5^{10} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, \mathrm{d}x = \int_5^{10} \underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}_{\sqrt{1+t},\text{ där } t=\frac{1}{x^2}, t<1} \mathrm{d}x \tag{6}$$

Bestäm resttermen på Lagranges form utifrån $f(t) = (1+t)^{1/2}$ och substituera sedan in $t = 1/x^2$. Vi ser att $x = 5$ motsvarar $t = 1/25 < 1$ och $x = 10$ motsvarar $t = 1/100 < 1$, så maclaurinpolynomet kommer troligtvis approximera väl.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} &= 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{f^{(3)}(\beta)}{3!}t^3 = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{\frac{3}{8(1+\beta)^{5/2}}}{3!}t^3 = \Big/ t = \frac{1}{x^2} \Big/ = \\
&= 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + \frac{1}{16(1+\beta)^{5/2}} \cdot \frac{1}{x^6} \quad , \quad \beta \text{ mellan } 0 \text{ och } \frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Felet måste vara $< \frac{1}{1000}$ och vi tittar därför på (6) igen:

$$\begin{aligned}
&\int_5^{10} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, \mathrm{d}x = \int_5^{10} \left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + \frac{1}{16(1+\beta)^{5/2}} \cdot \frac{1}{x^6}\right) \mathrm{d}x = \\
&= \underbrace{\int_5^{10} \left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4}\right) \mathrm{d}x}_{\text{approximation}} + \underbrace{\int_5^{10} \left(\frac{1}{16(1+\beta)^{5/2}} \cdot \frac{1}{x^6}\right) \mathrm{d}x}_{\text{felet}} \quad , \quad \beta \text{ mellan } 0 \text{ och } \frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Felet är därmed:

$$\begin{aligned}
&\int_5^{10} \left(\frac{1}{16(1+\beta)^{5/2}} \cdot \frac{1}{x^6}\right) \mathrm{d}x \leq /\beta = 0/ \leq \frac{1}{16} \cdot \int_5^{10} \frac{1}{x^6}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{16} \cdot \left[-\frac{1}{5x^5}\right]_5^{10} = \\
&= \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{5 \cdot 10^5} + \frac{1}{5^6}\right) = \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{5^6 \cdot 2^5} + \frac{1}{5^6}\right) = \frac{1}{16 \cdot 5^6}\left(1 - \frac{1}{32}\right) < \frac{1}{1000} \implies \text{OK!}
\end{aligned}$$

Approximationen är således:

$$S \approx \int_5^{10} \left(1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4}\right)\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{1}{2x} + \frac{1}{24x^3}\right]_5^{10} = 10 - \frac{1}{20} + \frac{1}{24000} - 5 + \frac{1}{10} - \frac{1}{24 \cdot 125} =$$

$$= ... \approx \frac{101}{20}$$

I detta fall hade det räckt att göra en maclaurinutveckling av $\sqrt{1+t}$ till ordning 1, men det är svårt att veta på förhand.

7 Standardmaclaurinutvecklingar

Alla maclaurinutvecklingar nedan är det viktigt att du kan som rinnande vatten. Det är också viktigt att känna till för vilka x-värden som bra approximationer fås.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathcal{O}(x^{n+1}),\ x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathcal{O}(x^{n+1}),\ -1 < x \leq 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),\ x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathcal{O}(x^{2n+2}),\ x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \mathcal{O}(x^{2n+1}),\ -1 \leq x \leq 1$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1}),\ -1 < x \leq 1$$