Crash Course Envarre2- Konvergens

Mattehjälpen

Maj 2018

Contents

På denna föreläsning ska vi ta upp hur man

- Avgör om summor/integraler är konvergenta
- Beräknar vissa typer av summor
- Löser diffekvationer med potensserieansats
- Kopplar potensserie och tillhörande konvergensradie till varandra

1 Geometrisk summa

I en geometrisk summa gäller det att kvoten mellan två på varandra följande tal alltid är densamma. Om man har n stycken tal i en geometrisk summa och a_1 är det första talet gäller att summan av dessa är

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \tag{1}$$

Antag att $|q| < 1$ och att $n \to \infty$, då gäller

$$S = \frac{a_1}{1-q} \text{ , ty } \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Exempel: Beräkna summan $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k}$

Vi noterar att detta är en geometrisk summa med kvot $q = \frac{1}{3}$, och första tal i serien $a_1 = \frac{2}{3}$. Därmed gäller

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1 \tag{2}$$

Exempel: Beräkna $2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots$

Återigen noterar vi att detta är en geometrisk summa och vi får kvoten genom att dela ett tal i serien på dess föregående. $q = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Det gäller även att $a_1 = 2$. Vi skriver upp serien på summaform.

$$2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = \frac{2}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

2 Konvergens

2.1 Integralkriteriet

Sats: Om f är en funktion sådan att $f(x) \geq 0$ och $f(x)$ avtagande för $x \geq 1$ så gäller

- om $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ är konvergent så är $\sum\limits_{k=1}^\infty$ konvergent
- Motsvarande för divergent

Viktigt att känna till är att

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{är} \quad \begin{cases} \text{konvergent om} & \alpha > 1 \\ \text{divergent om} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Från integralkriteriet följer det därför att $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$ är konvergent för $\alpha > 1$, och divergent för $\alpha \leq 1$.

Vi har också att

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \quad \text{är} \quad \begin{cases} \text{konvergent om} & \alpha < 1 \\ \text{divergent om} & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

2.2 Jämförelsesats 1

Vi visar här ett par exempel på hur jämförelsesats 1 kan användas för att visa om en summa eller integral är konvergent.

Exempel: Avgör om $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ är konvergent.

Vi noterar att

$$\underbrace{\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+1}}_{G} < \underbrace{\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}}_{J} \tag{3}$$

Eftersom vi vet att J i (3) är konvergent enligt regel nämnd ovan, och G är mindre än J, så måste det följa att även G är konvergent. Använder man denna typ av resonemang bör man i slutet skriva '*följer från jämförelsesats att G är konvergent*'.

Exempel: Avgör om $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{k!}{k^k}$ är konvergent.

Vi kan visa att denna summa faktiskt är konvergent genom att skriva om den lite och hitta en annan summa som den garanterat är mindre än och som är konvergent.

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{k!}{k^k} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k}{k\cdot k\cdot \ldots \cdot k} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1\cdot 2}{k\cdot k}\cdot \underbrace{\frac{3\cdot \ldots \cdot k}{k\cdot \ldots \cdot k}}_{H} < \underbrace{\sum_{k=1}^\infty \frac{2}{k^2}}_{G} \tag{4}$$

Om vi skriver om summan likt i (4) ser vi att summan måste vara mindre än G (och G är standardkonvergent) eftersom $H < 1$. Därmed gäller enligt första jämförelsesatsen att summan vi undersöker är konvergent.

En vanlig fråga som ofta dyker upp när det här exemplet redovisas är hur det hade blivit om man istället hade valt att ta G som $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, hade vi då sagt att vår summa blivit divergent då istället? Svaret är nej och detta på grund av att vår uppskattning inte ger oss något då den är alldeles för grov. Att G, som är mycket större än den summan vi undersöker, är divergent behöver inte betyda att vår summa är divergent.

OBS! Första och andra jämförelsesatsen gäller endast för positiva serier/integraler med integrand ≥ 0.

2.3 Jämförelsesats 2

Jämförelsesats 2 för positiva serier:

Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är serier sådana att $a_k, b_k \geq 0$ och $a_k = b_k \cdot c_k$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$ där $0 < \lim_{k\to\infty} c_k < \infty$, så gäller att om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent så är även $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. Motsvarande gäller för divergens.

Jämförelsesats 2 för integraler:

Om $\int_a^b f(x)dx$ och $\int_a^b g(x)dx$ är generaliserade i a eller b (eller bägge punkterna), och om $f(x), g(x) \geq 0$, och $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ för $a < x < b$, där $h(x)$ har ett ändligt gränsvärde $A > 0$ då $x \to b^-$ respektive $x \to a^+$ så gäller:

- Om $\int_a^b g(x)dx$ är konvergent så är $\int_a^b f(x)dx$ konvergent
- Motsvarande för divergens

Nyckeln här är att förstå att om vi har en generaliserad integral så ska vi försöka skriva om integranden som en produkt mellan två funktioner där vi säkerligen vet att motsvarande integral för den ena är konvergent (eller divergent) och gränsvärdet när x går mot den generaliserade punkten för den andra funktionen är ändligt. Då kan vi dra slutsatser om huruvida den ursprungliga integralen är konvergent eller divergent, enligt andra jämförelsesatsen. Vi kikar på ett exempel så framgår principen förhoppningsvis tydligt.

Exempel: Avgör om $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^3+2}\, dx$ är konvergent.

Vi börjar med att notera att integralen är generaliserad i oändligheten och om vi ska göra något med andra jämförelsesatsen så är det ett gränsvärde då x går mot oändligheten vi ska undersöka. I integranden ser du att det är olika gradtal i täljare och nämnare och typiskt sett är det en bra idé att bryta ut det som dominerar i respektive.

$$\int_1^\infty \underbrace{\frac{x+1}{x^3+2}}_{f(x)}\,dx = \int_1^\infty \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1+1/x}{1+2/x^3}}_{h(x)}\,dx \tag{5}$$

Vi har nu skrivit $f(x) = g(x)h(x)$ och vi ser att

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1+1/x}{1+2/x^3} = 1 > 0$$

Detta betyder att konvergens/divergens för $\int_1^\infty f(x)dx$ helt och hållet avgörs av $\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$. Eftersom denna senare integral är konvergent medför det, tillsammans med det ändliga gränsvärdet för $h(x)$, att $\int_1^\infty f(x)dx$ är konvergent enligt andra jämförelsesatsen.

Exempel: Avgör om summan $\sum_{k=2}^\infty \frac{2^k+1}{3^k+1}$ är konvergent.

Vi resonerar på liknande sätt som i det föregående exemplet.

$$\sum_{k=2}^\infty \underbrace{\frac{2^k+1}{3^k+1}}_{a_k} = \sum_{k=2}^\infty \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^k}_{b_k} \cdot \underbrace{\frac{1+1/2^k}{1+1/3^k}}_{c_k}$$

Vi ser i att $\lim_{k\to\infty} c_k = 1$ och eftersom $\sum_{k=2}^\infty b_k$ är konvergent följer det enligt andra jämförelsesatsen att $\sum_{k=2}^\infty a_k$ är konvergent.

Exempel: Avgör om integralen $\int_0^\infty \frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx$ är konvergent.

Vi ser att denna integral är generaliserad i både $x = 0$ och oändligheten. När vi ska avgöra konvergens för en sådan integral måste vi dela upp den i två delar så att det finns högst en generaliserad punkt per integral. Gör tex uppdelningen

$$\int_0^\infty \frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx}_{J} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)}\,dx}_{G}$$

Vi studerar J och G separat och börjar med J. Skulle det visa sig att J är divergent kan vi direkt säga att den ursprungliga integralen är divergent, för det krävs att både J och G är konvergenta för att ursprungliga ska vara det.

$$J = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{x+1}}_{h(x)}\,dx$$

Där det gäller att

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{x+1} = /\text{Enligt std.grv.}/ = 1\cdot 1 = 1 \tag{6}$$

Gränsvärdet i (6) är ändligt och större än 0, dessutom gäller att $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ är konvergent. Av detta följer det enligt jämförelsesats 2 att J är konvergent.

Vi övergår till att studera G. Nu är det istället när x går mot oändligheten som konvergens/divergens för integralen kommer avgöras. Vi vet att $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan\sqrt{x} = \pi/2$ och vi kommer kunna bryta ut x^2 från nämnaren. Vi får

$$G = \int_1^\infty \frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)}\, dx = \int_1^\infty \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g_2(x)} \cdot \underbrace{\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+1/x}}_{h_2(x)}\, dx$$

där det gäller att $\lim\limits_{x\to\infty} h_2(x) = \frac{\pi/2}{1+0} = \pi/2$. Med motsvarande motivering enligt ovan följer det att även G är konvergent. Slutligen, eftersom både J och G är konvergenta gäller det att $\int\limits_0^\infty \frac{\arctan\sqrt{x}}{x(x+1)}\, dx$ är konvergent.

Exempel: Avgör om $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\ln(1+1/n^3)}_{a_n}$ är konvergent.

$$a_n = \frac{\ln(1+1/n^3)}{1/n^3} \cdot 1/n^3 = \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{b_n} \cdot \underbrace{\frac{\ln\left(1+1/n^3\right)}{1/n^3}}_{c_n}$$

Här har den allmänna termen a_n skrivits om så att det finns ett standardgränsvärde inbakat i den,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+t^3)}{t^3} = 1.$$

Eftersom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ är konvergent och $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$ är $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+1/n^3)$ konvergent.

Alternativt: skriv om a_n med hjälp av maclaurin-utveckling:

$$a_n = \ln(1+1/n^3) = /\text{för } \underline{\text{stora}} \text{ n}/ = \frac{1}{n^3} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^6}) = \frac{1}{n^3} \underbrace{\left(1 + \mathcal{O}(\frac{1}{n^3})\right)}_{\to 1 \text{ då } n\to\infty}$$

2.4 Divergenstestet

Divergenstestet är ett test som kan användas för att säga om en serie är divergent. Observera, om divergenstestet inte visar att serien är divergent kan du inte dra några slutsatser alls. Det kan vara så att serien är divergent trots att den klarar divergenstestet, eller så är serien konvergent- det går helt enkelt inte att säga något då på förhand. Det man testar i divergenstestet är om $a_k \to 0$ då $k \to \infty$.

Exempel: Avgör om $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{1/k^2}$ är divergent.

Vi kan direkt säga att summan är divergent ty

$$\lim_{k\to\infty} e^{1/k^2} = e^0 = 1 \tag{7}$$

Det är orimligt att denna summa ska kunna vara konvergent i och med att i "svansen" av summan så adderar vi massa ettor, och därmed kommer den garanterat att växa mot oändligheten. Denna summa klarar alltså inte divergenstestet och därför kan vi direkt säga att den är divergent. Tittar vi däremot på $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ så gäller det att den klarar divergenstestet ty $1/k \to 0$, då $k \to \infty$. Denna serie är känd som den *harmoniska serien* och den är divergent.

2.5 Absolutkonvergens

Liknande för det som skrivs i satsen nedan gäller för serier.

Sats: Om $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ är en generaliserad integral, tex $a = -\infty$ eller $b = \infty$, så gäller att om $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ är konvergent, så är $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent.

Exempel: Avgör om följande integraler är absolutkonvergenta, dvs om $\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ är konvergent.

a) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\int\limits_0^{1} \frac{\cos x^{-1}}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$

Vi börjar med att kika på a) och kan direkt säga att vår integral är mindre än integralen för beloppet av integranden. Därefter vet vi att $|\cos x| \leq 1$.

$$\text{a)} \quad \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x}_{G} \leq \underbrace{\int_1^{\infty} |\frac{\cos x}{x^2}|\,\mathrm{d}x}_{H} \leq \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x}_{J}$$

Eftersom J är konvergent måste det följa att H är konvergent och därmed är G absolutkonvergent. Om en integral är absolutkonvergent så är den även konvergent.

Till att börja med ser vi att integralen i b) är generaliserad i $x = 0$. Sen kan vi använda att $|\cos x^{-1}| \leq 1$ och slutligen kan vi även utnyttja ett standardgränsvärde som finns för sinus då $x \to 0$.

b) $$\int_0^1 \frac{\cos x^{-1}}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \left|\frac{\cos x^{-1}}{\sqrt{\sin x}}\right|\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\cdot\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{g(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\frac{\sin x}{x}}}}_{h(x)}\,\mathrm{d}x}_{B}$$

Vi ser att B är konvergent enligt andra jämförelsesatsen (delvis pga standardgränsvärdet då $x \to 0$ för $h(x)$) och från det följer det att integralen vi undersöker konvergens för är absolutkonvergent.

Ett alternativt sätt att visa att B är konvergent på, utan att använda det nyss använda standardgränsvärdet, hade varit genom att maclaurinutveckla $\sin x$. Efter det bryter man ut lämplig faktor från nämnaren och försöker visa att integralen är konvergent enligt andra jämförelsesatsen.

2.6 Leibniz-konvergenta serier

Obs! Detta gäller endast för serier.

En serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ kallas för Leibniz-konvergent om följande tre krav är uppfyllda:

1. Serien är alternerande, dvs varannan term är positiv/negativ
2. $|a_{k+1}| \leq |a_k|$ för $k = 1, 2, 3\ldots$ (det är särskilt viktigt att det gäller för stora k)
3. $a_k \to 0$ då $k \to \infty$

Exempel: Är följande serier Leibniz-konvergenta?

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \sin\frac{1}{k}$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(-2)^k}$

För a)

1. Vi noterar att vi har faktorn $(-1)^k$ i den allmänna termen samt att $\sin\frac{1}{k}$ alltid kommer anta ett positiv värde för dessa k. Det senare pga att för heltal $k \geq 1$ så gäller $0 < 1/k < \pi$, och för sådana argument är sinus alltid positivt. Därmed kommer serien alternera och första kriteriet för att serien ska vara Leibniz-konvergent är uppfyllt.
2. Sen har vi dessutom att $1/k \to 0$ då $k \to \infty$ och det gör att faktorn $\sin\frac{1}{k}$ minskar i värde ju större k blir. Därmed, studerar vi beloppet för den allmänna termen mot k-värdet så är det avtagande. Kriterie nummer 2 är uppfyllt.
3. Avslutningsvis ser vi att $a_k \to 0$ då $k \to \infty$ och det gör att alla tre kriterier för att serien ska vara Leibniz-konvergent är uppfyllda och vi avslutar med att skriva att serien är konvergent enligt Leibniz.

Obs! Låt säga att en serie är Leibniz-konvergent, då är det mycket viktigt att tydligt skriva ner att serien uppfyller dessa tre villkor, glömmer man något så får man ingen poäng oftast.

För b)

1. Serien är alternerande pga att $(-2)^k$ finns med i den allmänna termen och $k^2 > 0$ för heltal $k \geq 1$.

2. Vi ser dock att kriterie 2 ej är uppfyllt ty för $k = 1, 2, 3, 4, 5$ får vi $|a_k| = 1/2, 1, 9/8, 1, 25/32$. Detta beror på att potensfunktionen i täljaren växer snabbare än exponentialfunktionen i nämnaren för små k. Dock påverkas inte konvergens för serien av ett ändligt antal termer i början av det så vad vi kan göra är att dela upp summan i två delar enligt följande

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(-2)^k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{10} \frac{k^2}{(-2)^k}}_{G} + \underbrace{\sum_{k=11}^{\infty} \frac{k^2}{(-2)^k}}_{J}$$

Här har summan i b) delats upp så att Leibniz-kriterie 2 säkert är uppfyllt för J. Det hade dock räckt med att "bryta" den första summan vid $k = 4$, exakt val är inte viktigt. G är lika med något tal och vi kan nu argumentera för att J är Leibniz-konvergent, av detta följer att den serien vi studerar är konvergent.

Om en serie $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är Leibniz-konvergent gäller det att

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k| \leq |a_{n+1}| \tag{8}$$

Resultatet i (8) är intressant om man vill ha reda på hur stor skillnad det är på den faktiska oändliga serien och en trunkerad där man endast tagit med n n stycken termer.

2.7 Generaliserade integraler och partiell integration

Hitintills när vi stött på generaliserade integraler och haft som uppgift att avgöra om de är konvergenta har vi försökt med att använda någon av jämförelsesatserna eller undersökt om integralen är absolutkonvergent. Det finns ett till trick som man kan använda och det är att göra en partiell integration av den integral som är given.

Exempel: Avgör om $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ är konvergent.

Man kan börja med att undersöka om integralen är absolutkonvergent.

$$\underbrace{\int_{\pi}^{\infty} |\frac{\cos x}{x}|\,\mathrm{d}x}_{A} \leq \int_{\pi}^{\infty} |\frac{1}{x}|\,\mathrm{d}x = /x > 0/ = \underbrace{\int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}_{B}$$

Vi ser att B är divergent men i och med att värdet på den integralen är större än värdet på A så kan vi inte säga något om huruvida A är divergent eller inte. Därmed kan vi inte säga om integralen i exemplet är absolutkonvergent eller inte.

Vi testar nu istället att köra partiell integration och deriverar funktionen $1/x$ för att vi innanför integralen istället ska få x:et i nämnaren i kvadrat istället. Det passar oss bättre om vi tänker att vi ska hänvisa till någon standardintegral som vi säkert vet är konvergent.

$$\int_{\pi}^{\infty} \underbrace{\cos x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)} \,\mathrm{d}x = /\text{PI: Hittar primitiv till f, deriverar g}/$$

$$= \left[\frac{\sin x}{x}\right]_{\pi}^{\infty} - \int_{\pi}^{\infty} -\frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \frac{\sin b}{b} - \frac{\sin \pi}{\pi} + \underbrace{\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x}_{C} = 0 - 0 + C$$

Dvs, konvergensen för vår ursprunliga integral avgörs av konvergensen för C. Det visar sig att C är absolutkonvergent (och därmed konvergent) och därför är den generaliserade integralen i exemplet alltså konvergent.

Tips på en utmanande gammal tentauppgift: 2016-03-23 (5b).
Avgör om $\int_0^\infty (x^{1/2} + x^{-1/2}) \cos x^2 \,\mathrm{d}x$ är konvergent.

3 Potensserier

En potensserie är en serie med en variabel i sig. Det kan vara så att för vissa värden på variabeln är serien konvergent, medans för andra är den divergent.

Exempel: Vi kan skriva alla geometriska summor med första term = 1 och oändligt många termer som

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \tag{9}$$

där x är kvoten för den geometriska summan. För att serien i (9) ska vara konvergent så krävs det att $|x| < 1$. Därför säger man att *konvergensradien* (R) för serien i (9) är 1.

3.1 Konvergensradie

För att undersöka konvergensradien för en serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kan man använda 2 olika kriterier.

1. Rot-kriteriet:

   $$\sqrt[k]{|a_k|} \to Q \text{ då } k \to \infty$$

2. Kvot-kriteriet

   $$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \to Q \text{ då } k \to \infty$$

Viktigt! Om $Q < 1$ så är serien absolutkonvergent och konvergensradien för serien kan vi avläsa när vi har använt något av kriterierna och sedan fått en olikhet på formen $|x| <$ R. För $|x| <$ R kan vi säkert säga att serien är konvergent (eftersom den för dessa x är absolutkonvergent), men för de x som uppfyller $|x|$ =R så måste en separat undersökning göras för varje fall. Om x antas vara reellt måste man undersöka för $x =$ R samt $x = -$R.

Exempel: Från tentan 2018-03-12 (4b). Bestäm alla reella x sådana att $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln k)^2}{4^k(k-1)} x^{2k}$ konvergerar.

$a_k = \frac{(\ln k)^2}{4^k(k-1)} x^{2k}$ och efter en del omskrivningar och användning av rotkriteriet för att bestämma konvergensradien får vi

$$\begin{aligned}
\sqrt[k]{\frac{|(\ln k)^2|}{|4^k(k-1)|}|x^{2k}|} &= \frac{|x|^2}{4} \cdot \underbrace{\sqrt[k]{\frac{(\ln k)^2}{k-1}}}_{J} = \frac{|x|^2}{4} \cdot \underbrace{\frac{(\ln k)^{2/k}}{(k-1)^{1/k}}}_{H} = \frac{|x|^2}{4} \cdot e^{\ln\left(\frac{(\ln k)^{2/k}}{(k-1)^{1/k}}\right)} \\
&= \frac{|x|^2}{4} \cdot e^{\ln((\ln k)^{2/k}) - \ln((k-1)^{1/k})} = \frac{|x|^2}{4} \cdot e^{\frac{2}{k}\ln(\ln k) - \frac{1}{k}\ln(k-1)} \\
&= \frac{|x|^2}{4} \cdot \underbrace{e^{\frac{2\ln(\ln k) - \ln(k-1)}{k}}}_{G} \to \frac{|x|^2}{4} \cdot e^0 = \underbrace{\frac{|x|^2}{4}}_{Q}, \text{då } k \to \infty
\end{aligned}$$

Ovan ser du J och den delen av uträkningen har markerats för att det är viktigt att därifrån motivera vad det uttrycket går mot då $k \to \infty$. För att ta reda på detta börjar vi med att skriva om J enligt H och därefter utnyttjar vi att $H = e^{\ln H}$. Slutligen, efter mycket användning av de olika logaritmlagarna, kommer vi fram till G och då kan vi beräkna gränsvärdet eftersom vi vet att en potensfunktion växer snabbare än en logaritmfunktion. I det sista steget kan man hänvisa till hastighetstabell men det är inte nödvändigt.

Om $Q < 1$ gäller det att serien är absolutkonvergent, om $Q > 1$ är serien divergent och då $Q = 1$ kan inget sägas.

$$\frac{|x|^2}{4} < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \tag{10}$$

Från (10) kan vi avläsa konvergensradien, R=2. Om uppgiften hade varit att endast bestämma konvergensradien för serien hade vi stannat där, men nu ska vi avgöra för vilka reella x-värden som serien är konvergent. Vi kan direkt säga att den är konvergent för $-2 < x < 2$ men gränsfallen $x = \pm 2$ måste undersökas separat.

För $x = 2$ får vi summan

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln k)^2}{4^k(k-1)} 2^{2k} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln k)^2}{4^k(k-1)} 4^k = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\ln k)^2}{(k-1)} \geq \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k}}_{D}$$

D är divergent och då måste det gälla att den serien som fås för $x = 2$ är divergent, eftersom den är större. Vid uppskattningen användes att för heltal $k \geq 3$ så gäller att $\ln k > 1$ och $k > k - 1$. För $x = -2$ blir det på exakt samma sätt som för $x = 2$ så därför gäller det att potensserien är konvergent för $-2 < x < 2$.

Ett par kommentarer gällande rot- och kvot-kriteriet:

1. Det är ofta smidigt att använda kvot-kriteriet då fakulteter är inblandade.
2. Om $Q = 0$ innebär det att potensserien är absolutkonvergent (och därmed konvergent) för alla x och då är R $= \infty$.

Exempel: Bestäm konvergensradien för $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Med kvot-kriteriet fås

$$\frac{\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|x|^k}{k!}} = \frac{|x|}{k+1} \to 0, \text{ då } k \to \infty.$$

Dvs, oavsett vilket x-värde du stoppar in i serien så kommer summan alltid att vara konvergent.

Viktigt: Om du har en funktion $y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln k)^2}{4^k(k-1)} x^{2k}$ så är det okej att derivera och integrera denna funktion termvis <u>endast</u> om vi studerar x som ligger innanför konvergensradien. Detta kommer användas bland annat om man ska beräkna en summa eller om man ska lösa en diffekvation med en potensserieansats.

3.2 Beräkna summa

Vanligtvis blir man ombedd att avgöra huruvida en serie är konvergent eller inte men ibland kan det efterfrågas exakt vad serien är lika med. Man gör inte alltid på samma sätt, men ofta ska man göra liknande enligt det som görs nedan i exemplet.

Exempel: Beräkna summan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$.

Den summa som är given kan vi se som en funktion och en potensserie på formen

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k \tag{11}$$

Med $x = 1/2$ instoppad. För att beräkna $g(1/2)$ utgår vi ifrån en potensserie som är en geometrisk summa där kvoten x till beloppet är mindre än 1. Denna summa har vi en formel för att beräkna och den motiveras under avsnittet "Geometrisk summa".

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \ |x| < 1 \tag{12}$$

Sen ska vi försöka uttrycka $g(x)$ i derivator och/eller primitiver av $f(x)$, eventuellt multiplicerade med x eller något liknande dessutom. Vi vet vad $f(x)$ är lika med och motsvarande operationer som görs på $f(x)$ för att få till $g(x)$ måste göras på högerledet i (12).

För att "få ner" k så tar vi och deriverar $f(x)$. När vi deriverar ryker konstant-termen så om vi önskar kan vi nu indexera summan från $k = 1$. Påminner också om att termvis derivering av denna funktion endast är tillåtet om vi antar att x ligger innanför konvergensradien, som i detta fall är 1.

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \tag{13}$$

Multiplicera sedan (13) med x.

$$xf'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k} = g(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Slutligen fås

$$g(1/2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$$

Kommentar: Ibland kan man behöva derivera eller integrera flera gånger för att få den funktion som är intressant för beräkning av en summa. Ett tips är att kika på uppgift 10.23 i boken- den är bra!

3.3 Lösa diffekvation med potensserieansats

Fram tills nu har ett antal olika metoder för att lösa diffekvationer tagits upp. Här kommer ytterligare en och tanken är att man ansätter att lösningen till diffekvationen kan skrivas som en serie

$$y(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k}_{A} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots \tag{14}$$

Vi visar med ett exempel hur lösningsgången överlag brukar se ut.

Exempel: Lös $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$

Typiskt sett när man ska lösa en diffekvation med potensserieansats finns det i VL derivator av y som eventuellt är multiplicerade med konstanter eller x av något slag. I högerledet brukar det finnas något polynom. Till en början kan man misstänka att denna diffekvation ska lösas som en Eulerekvation men pga att vi inte fått att x antingen ska vara större än eller mindre än 0 så utesluter det den möjligheten, eftersom vi då inte kan göra variabelbytet $t = \ln x$ eller $t = \ln(-x)$.

Vi börjar med att ansätta att lösningen till denna diffekvation är på formen specificerad i (14). Sen antar vi att x vi endast studerar x som ligger innanför konvergensradien, då är det okej att derivera vår ansats.

$$y'(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} kc_k x^{k-1}}_{B} \tag{15}$$

$$y''(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}}_{C} = /k = 0,1 \text{ ger } 0/ = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} = /\text{Justerar index för summan}/$$
$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k}_{D}$$

Nu är det rimligt att fråga sig varför vi har hållit på och trixat med indexen i summan för andraderivatan. Det vi slutligen vill komma till är en likhet som ser ut något i stil med det följande

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\text{Något uttryck i koefficienterna } c_{\ldots}) \cdot x^k = \text{Ett polynom som är givet i HL i uppgiften} \tag{16}$$

Tanken är sen att identifiera koefficienter för x^k i (16) ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$) och härleda ett rekursivt samband mellan koefficienterna. Så lejonparten av uppgiften går ut på att hitta vad tex c_{k+2} är uttryckt i koefficienterna c_k, c_{k+1}. För att vi ska kunna skriva diffekvationen på den form som är specificerad i (16) är det dock nödvändigt att uttrycka andraderivatan på olika sätt.

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = \underbrace{y''}_{\text{Stoppa in } D} - x^2 \cdot \underbrace{y''}_{\text{Stoppa in } C} - 2x \cdot \underbrace{y'}_{\text{Stoppa in } B} + 2 \underbrace{y}_{\text{Stoppa in } A} = 0 \tag{17}$$

Om vi nu tar och skriver (17) med alla summor instoppade fås

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - x^2\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)c_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=0}^{\infty}kc_k x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}((k+2)(k+1)c_{k+2} - k(k-1)c_k - 2kc_k + 2c_k) \cdot x^k =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}((k+2)(k+1)c_{k+2} - (k+2)(k-1)c_k) \cdot x^k = 0$$

Studera nu koefficienten för x^k i vänsterledet

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\underbrace{(k+2)(k+1)c_{k+2} - (k+2)(k-1)c_k}_{=0}) \cdot x^k = 0 \tag{18}$$

För att VL i (18) ska vara lika med 0 (HL) oavsett x-värde inom konvergensradien måste det gälla att koefficienten för alla $x^k, k = 0, 1, 2, \ldots$ är 0. Detta ger oss följande ekvation

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} - (k+2)(k-1)c_k = 0 \tag{19}$$

Efter lite omflyttningar i (19) får vi det rekursiva samband vi söker.

$$c_{k+2} = \frac{k-1}{k+1}c_k \tag{20}$$

Det är nu dags att utnyttja de bivillkor som gavs. Vi vet att

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$
$$y'(x) = c_1 + 2c_2x + \dots$$

Och med bivillkoren $y(0) = y'(0) = 1$ fås

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_0 = 1$$
$$y'(0) = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

Därefter bestämmer vi några efterföljande koefficienter och letar efter ett mönster. Vi börjar med att studera jämna k. För $k = 0$ fås

$$c_2 = \frac{0-1}{0+1}c_0 = (-1) \cdot 1 = -1$$

För $k = 2$ fås

$$c_4 = \frac{2-1}{2+1}c_2 = \frac{1}{3}(-1) = -\frac{1}{3}$$

För $k = 4$ fås

$$c_6 = \frac{4-1}{4+1}c_4 = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{5}$$

Här kan vi nu börja ana ett mönster. Det verkar som att $c_n = -\frac{1}{n-1}$. Vi övergår till att studera udda k. För $k = 1$ fås

$$c_3 = \frac{1-1}{1+1}c_1 = 0$$

Pga att $c_3 = 0$ följer det att $c_5, c_7, c_9, \dots = 0$. När vi nu vet hur alla koefficienter beräknas kan vi skriva upp $y(x)$.

$$y(x) = 1 + x - x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{5} - \ldots = 1 + x - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k-1}}_{E} \tag{21}$$

Til det svar som ges i (21) bör man även skriva skriva till vad konvergensradien för serien (E) är. I detta fall fås med tex rot-kriteriet att R = 1. Notera också att när vi i (21) övergår till att skriva lösningen på summaform så skriver vi två termer utanför pga att de inte följer mönstret, och sen skriver vi innanför summan $2k$ istället för k pga att vi vill hoppa över x med udda exponent.

Något som kan förvirra en när man precis introducerats till lösning av diffekvationer med potensserieansats är hur man gör om det står något annat än 0 i HL. Antag nu att vi har följande scenario. Vi har någon diffekvation med bivillkor $y(0) = 1, y'(0) = 0$. Vi gör en potensserieansats och efter lite räkning kommer vi fram till

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1)c_{k+2} - c_k) \cdot x^k = x \tag{22}$$

Utifrån bivillkoren fås att $c_0 = 1, c_1 = 0$. Nu har vi dock att koefficienten för x i (22) är lika med 1 och då kan vi inte längre säga att koefficienten för x^k är 0 för $k = 0, 1, 2, \ldots$ utan det gäller endast för alla $k \neq 1$. Det här ger oss ett ekvationssystem i ett par koefficienter.

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2c_2 & - & c_0 & = & 0 \quad (k=0) \\ 6c_3 & - & c_1 & = & 1 \quad (k=1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_2 = 1/2 \\ c_3 = 1/6 \end{array} \right.$$

När vi sen har c_2 och c_3 använder vi dessa på liknande sätt som vi gjorde i det föregående exemplet för att bestämma alla övriga koefficienter i potensserien.