HOMOGENA LINJÄRA DIFFERENTIALEKVATIONER MED KONSTANTA KOEFFICIENTER

Linjär differentialekvation (DE) med konstanta koefficienter är en ekvation av följande typ
$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ (1)
där koefficienter $a_{n-1},..., a_2, a_1, a_0$ är konstanter.
Om $f(x) = 0$ kallas ekvationen **homogen**, annars **icke-homogen** (eller inhomogen).

Den allmänna lösningen till ekvation (1) är

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

(= den allmänna lösningen till den homogena ekv (2)+ en partikulärlösning till (1)).

1. En homogen linjär differentialekvation med konstanta koefficienter är en ekvation av följande typ
$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ (2)
där koefficienter $a_{n-1},..., a_2, a_1, a_0$ är konstanter.
Den allmänna lösningen till en homogen DE är linjär kombination av *n* oberoende partikulärlösningar (som vi kallar baslösningar)
$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$ **.**

Vi söker linjärt oberoende partikulärlösningar på formen
$y = e^{rx}$.
Substitutionen i (2) och förkortning med e^{rx} ger
$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + ... + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$. (3)
Ekvationen (3) kallas **den karakteristiska ekvationen**.

1. 1 HOMOGENA LINJÄRA DIFFERENTIALEKVATIONER
AV ANDRA ORDNINGEN
MED KONSTANTA KOEFFICIENTER

linjära DE med konstanta koefficienter av andra ordningen

Differentialekvationen

$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ (4)

har den karakteristiska ekvationen

$r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ (5)

(Vi antar nedan, för enkelhets skull, att koefficienter a_1, a_0 är reella tal)

a) Om r_1 och r_2 är enkla reella rötter (dvs $r_1 \neq r_2$) då är

$y_1 = e^{r_1 x}$ och $y_2 = e^{r_2 x}$

två baslösningar till ekvationen (4).
Den allmänna lösningen är

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} .$$

b) Om r_1 är en dubbel rot (dvs $r_1 = r_2$) då är

$y_1 = e^{r_1 x}$ och $y_2 = x e^{r_1 x}$ två baslösningar till ekvationen (4)

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} .$$

c) Om r_1 och r_2 är två komplexa rötter, $r_1 = a + bi$, $r_2 = a - bi$ då är

$y_1 = e^{ax} \cos bx$ och $y_2 = e^{ax} \sin bx$

två baslösningar till ekvationen (4).
Den allmänna lösningen är

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx .$$

Exempel 1.
Lös följande DE med avseende på $y(x)$

$y'' - 5y' + 6y = 0$.

Lösning:

Den karakteristiska ekvationen

$r^2 - 5r + 6 = 0$

har två reella olika rötter $r_1 = 2$ och $r_2 = 3$.

Därför är $y_1 = e^{2x}$ och $y_2 = e^{3x}$ två baslösningar och

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

den allmänna lösningen till ekvationen.

Svar: $y_H = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

Uppgift 1.
Lös följande DE med avseende på $y(x)$.

a) $y'' - 10y' + 16y = 0$ **b)** $y'' - y' - 12y = 0$
c) $y'' + 6y' + 5y = 0$ **d)** $y'' + y' - 6y = 0$
e) $y'' + 3y' = 0$ **f)** $y'' - 6y' = 0$
g) $2y'' + 3y' = 0$ **h)** $3y'' - 6y' = 0$
i) $y'' - 4y = 0$ **j)** $y'' - 5y = 0$

Svar:

a) $y_H = c_1 e^{2x} + c_2 e^{8x}$ **b)** $y_H = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-3x}$
c) $y_H = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-5x}$ **d)** $y_H = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$
e) $y_H = c_1 + c_2 e^{-3x}$ **f)** $y_H = c_1 + c_2 e^{6x}$
g) $y_H = c_1 + c_2 e^{\frac{-3}{2}x}$ **h)** $y_H = c_1 + c_2 e^{2x}$
i) $y_H = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$ **j)** $y_H = c_1 e^{-\sqrt{5}x} + c_2 e^{\sqrt{5}x}$

Exempel 2.
Bestäm den lösning till differential ekvationen
$y'' - 7y' + 12y = 0$
som uppfyller begynnelsevillkoren
$y(0) = 0$ **och** $y'(0) = 1$.

Lösning:
Den karakteristiska ekvationen blir
$r^2 - 7r + 12 = 0$.
Den har två reella, olika rötter $r_1 = 3$ och $r_2 = 4$.
Därför är $y_1 = e^{3x}$ och $y_2 = e^{4x}$ två baslösningar och

$$y_H = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

den allmänna lösningen till ekvationen.
Om vi utnyttjar villkoret $y(0) = 0$ får vi
$C_1 + C_2 = 0$ (*)
För att använda villkoret $y'(0) = 1$ måste vi först derivera lösningen

$$y_H = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}.$$

Vi får

$$y'_H = 3c_1 e^{3x} + 4c_2 e^{4x}.$$

Villkoret $y'(0)=1$ ger nu

$$1=3c_1+4c_2 \quad (**)$$

Från (*) får vi $C_1=-C_2$ som vi substituerar i (**) och får

$$1=-3c_2+4c_2 \Rightarrow$$

$$1=c_2.$$

Eftersom $C_1=-C_2$ får vi $C_1=-1$

Den sökta lösningen blir därmed

$$y=-e^{3x}+e^{4x}.$$

Svar: $y=-e^{3x}+e^{4x}$

Uppgift 2a. Lös följande begynnelsevärdesproblem.

a) $y''-8y'+12y=0$, $y(0)=3$ **och** $y'(0)=14$

b) $y''-4y=0$, $y(0)=4$ **och** $y'(0)=0$

Svar: a) $y=e^{2x}+2e^{6x}$ b) $y=2e^{2x}+2e^{-2x}$

Uppgift 2b. Lös följande randvärdesproblem.

a) $y''-5y'+6y=0$, $y(0)=2$ **och** $y(1)=e^2+e^3$

a) $y''-3y'=0$, $y(0)=3$ **och** $y(2)=2+e^6$

Svar: a) $y=e^{2x}+e^{3x}$ b) $y=2+e^{3x}$

Exempel 3.

Lös DE med avseende på $y(x)$

$y''-4y'+4y=0$.

Lösning:

Den karakteristiska ekvationen

$r^2-4r+4=0$

har två reella lika rötter $r_1=2$ och $r_2=2$ ($r_1=2$ är en dubbel rot).

Härav får vi två baslösningar $y_1 = e^{2x}$ och $y_2 = xe^{2x}$ och därför är

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{2x} + c_2 xe^{2x}$$

den allmänna lösningen till ekvationen.

Svar: $y_H = c_1 e^{2x} + c_2 xe^{2x}$

Uppgift 3a.
Lös följande DE med avseende på $y(x)$

a) $y'' - 2y' + y = 0$ **b)** $y'' + 2y' + y = 0$
c) $y'' + 4y' + 4y = 0$ **d)** $y'' - 10y' + 25y = 0$
e) $4y'' - 4y' + y = 0$ **f)** $9y'' + 6y' + y = 0$

Svar:

a) $y_H = c_1 e^{x} + c_2 xe^{x}$ **b)** $y_H = c_1 e^{-x} + c_2 xe^{-x}$
c) $y_H = c_1 e^{-2x} + c_2 xe^{-2x}$ **d)** $y_H = c_1 e^{5x} + c_2 xe^{5x}$
e) $y_H = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 xe^{\frac{1}{2}x}$ **f)** $y_H = c_1 e^{\frac{-1}{3}x} + c_2 xe^{\frac{-1}{3}x}$

Uppgift 3b. Lös följande begynnelsevärdesproblem

$y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 2$ **och** $y'(0) = 7$**.**

Svar: $y = 2e^{3x} + xe^{3x}$

Exempel 4.
Lös DE med avseende på $y(x)$
$y'' - y' + y = 0$.

Lösning:
Den karakteristiska ekvationen
$r^2 - r + 1 = 0$

har två komplexa rötter $r_1 = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Härav får vi två baslösningar

$$y_1 = e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \text{ och } y_2 = e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

och därför är

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

den allmänna lösningen till ekvationen.

Svar: $y_H = c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

Uppgift 4a)

Lös följande DE med avseende på $y(x)$

a) $y'' - 2y' + 10y = 0$ **b)** $y'' + 2y' + 5y = 0$
c) $y'' - 4y' + 13y = 0$ **d)** $y'' + 4y' + 5y = 0$
e) $y'' + 4y = 0$ **f)** $2y'' + 10y = 0$
g) $2y'' + 5y = 0$ **h)** $4y'' + y = 0$

Svar:

a) $y_H = c_1 e^{x} \cos(3x) + c_2 e^{x} \sin(3x)$

b) $y_H = c_1 e^{-x} \cos(2x) + c_2 e^{-x} \sin(2x)$

c) $y_H = c_1 e^{2x} \cos(3x) + c_2 e^{2x} \sin(3x)$

d) $y_H = c_1 e^{-2x} \cos(x) + c_2 e^{-2x} \sin(x)$

e) $y_H = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$

f) $y_H = c_1 \cos(\sqrt{5}x) + c_2 \sin(\sqrt{5}x)$

g) $y_H = c_1 \cos(\sqrt{\frac{5}{2}}x) + c_2 \sin(\sqrt{\frac{5}{2}}x)$

h) $y_H = c_1 \cos(\frac{1}{2}x) + c_2 \sin(\frac{1}{2}x)$

Uppgift 4b) Lös följande begynnelsevärdesproblem

$y'' + 9y = 0$, $y(0) = 1$ **och** $y'(0) = 6$.

Svar: $y = 2\sin 3x + \cos 3x$

Uppgift 3c) Lös följande randvärdesproblem

$y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$ **och** $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Svar: $y = \sin 2x + \cos 2x$

1. 2 HOMOGENA LINJÄRA DIFFERENTIALEKVATIONER AV FÖRSTA ORDNINGEN MED KONSTANTA KOEFFICIENTER

Exempel 5.
Lös DE med avseende på $y(x)$
$y'+6y=0$.

Lösning:
Den karakteristiska ekvationen
$r+6=0$
har en rot $r_1=-6$.

Detta ger en baslösning $y_1=e^{-6x}$.
Härav

$$y_H=c_1y_1=c_1e^{-6x}$$

är den allmänna lösningen till ekvationen.

Svar: $y_H=c_1e^{-6x}$

Uppgift 5.
Lös följande DE med avseende på $y(x)$

a) $y'+8y=0$ **b)** $y'-5y=0$
c) $2y'+5y=0$ **d)** $3y'-5y=0$
e) $y'=3y$ **f)** $y'=-4y$

Svar:

a) $y_H=c_1e^{-8x}$ **b)** $y_H=c_1e^{5x}$
c) $y_H=c_1e^{\frac{-5}{2}x}$ **d)** $y_H=c_1e^{\frac{5}{3}x}$
e) $y_H=c_1e^{3x}$ **f)** $y_H=c_1e^{-4x}$

1. 3 HOMOGENA LINJÄRA DIFFERENTIALEKVATIONER
AV HÖGRE ORDNINGEN
MED KONSTANTA KOEFFICIENTER

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (2)$$

Den allmänna lösningen till en homogen DE är linjär kombination av n oberoende partikulärlösningar (som vi kan kalla baslösningar)

$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$.

Vi söker linjärt oberoende partikulärlösningar på formen

$y = e^{rx}$.

Substitutionen i (2) och förkortning med e^{rx} ger

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 . \qquad (3)$$

Ekvationen (3) kallas **den karakteristiska ekvationen**.
För enkelhets skull betraktar vi ekvationer med reella koefficienter a_k .

Om r_k är en reell rot till ekvation (3) med multiplicitet v_k då är

$$y_1 = e^{r_k x} \ , \ y_2 = xe^{r_k x} ,\ldots, y_{v_k} = x^{v_k - 1}e^{r_k x}$$

tillhörande baslösningar.

Om ekvationen (3) har två komplexa rötter $a \pm bi$, med multiplicitet v , då är

$$y_1 = e^{ax}\cos bx \ , y_2 = xe^{ax}\cos bx , \ldots, \ y_v = x^{v-1}e^{ax}\cos bx$$

och

$$y_{v+1} = e^{ax}\sin bx , \ y_{v+2} = xe^{ax}\sin bx ,\ldots, \ y_{2v} = x^{v-1}e^{ax}\sin bx$$

tillhörande baslösningar.

Exempel 6.
Lös DE med avseende på $y(x)$

$y^{(5)} - 3y^{(4)} = 0$.

Lösning:
Den karakteristiska ekvationen

$r^5 - 3r^4 = 0$

kan faktoriseras:

$r^4(r-3) = 0 \ \Rightarrow$

$r \cdot r \cdot r \cdot r \cdot (r-3) = 0 \Rightarrow$

$r_{1,2,3,4} = 0$, $r_5 = 3$.

Roten $r = 0$ har multiplicitet 4.
Tillhörande baslösningar är

$$y_1 = e^{0\cdot x} \ , \ y_2 = xe^{0\cdot x} , y_3 = x^2 e^{0\cdot x} , y_4 = x^3 e^{0\cdot x} .$$

Eftersom $e^0 = 1$, detta ger

$y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = x^3$

Från $r_5 = 3$ får vi en till baslösning

$y_5 = e^{3x}$.

Den allmänna lösningen är

$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_5 y_5$

$= c_1 + c_2 x^1 + c_3 x^2 + + c_4 x^3 + c_5 e^{3x}$.

Svar: $y_H = c_1 + c_2 x^1 + c_3 x^2 + + c_4 x^3 + c_5 e^{3x}$

Uppgift 6.

Lös följande DE med avseende på $y(x)$

a) $y^{(4)} + 5y''' = 0$ **b)** $y''' - 2y'' + y' = 0$

c) $y^{(4)} - 5y''' + 6y'' = 0$ **d)** $y^{(4)} - 4y''' + 13y'' = 0$

Svar:

a) $y_H = c_1 + c_2 x^1 + c_3 x^2 + c_4 e^{-5x}$ **b)** $y_H = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x$

c) $y_H = c_1 + c_2 x^1 + c_3 e^{2x} + c_4 e^{3x}$ **d)** $y_H = c_1 + c_2 x^1 + c_3 e^{2x} \sin 3x + c_4 e^{2x} \cos 3x$

====================================

WRONSKIS DETERMINANT

Som sagt ovan, den allmänna lösningen till en homogen DE

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (2)$$

är linjär kombination av n oberoende partikulärlösningar (som vi kallar baslösningar)

$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$.

Ett sätt att kontrollera om lösningar till (2) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ är oberoende är att beräkna **Wronskis determinant:**

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2 & \cdots & y_n \\ & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Lösningar till (2) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ är **oberoende** om och endast om **Wronskis determinant är skild från 0:**

Uppgift 7.

Visa att lösningarna $y_1 = e^{2x}$ och $y_2 = e^{3x}$ till $y'' - 5y' + 6y = 0$ är oberoende.

Lösning:

Wronskis determinant $W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = e^{5x} \neq 0 \Rightarrow$ y_1, y_2 är oberoende.

Uppgift 8.

Visa att lösningarna $y_1 = \sin x$ och $y_2 = \cos x$ till $y'' + y = 0$ är oberoende.

Lösning:

Wronskis determinant $W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ y_1, y_2 är oberoende

Uppgift 9.

Bestäm om lösningarna $y_1 = 5e^{2x}$ och $y_2 = 3e^{2x}$ till $y'' - 5y' + 6y = 0$ är beroende eller oberoende.

Lösning:

Wronskis determinant $W = \begin{vmatrix} 5e^{2x} & 3e^{2x} \\ 10e^{2x} & 6e^{2x} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ y_1, y_2 är **beroende**.

Uppgift 10.

Bestäm om lösningarna $y_1 = e^{2x}$ och $y_2 = e^{3x}$ och $y_3 = 1$ till $y''' - 5y'' + 6y' = 0$ är beroende eller oberoende.

Svar: Oberoende eftersom $W = e^{5x} \neq 0$.