

DIFFERENTIALER

1. DIFFERENTIALER $df(x) = f'(x)dx$.

Beteckningar.

Vi betraktar en reell funktion $y = f(x)$ av en oberoende variabel x .

Differensen mellan två x -värden och $x_2 - x_1$ betecknas ofta med Δx ,

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

På samma sätt betecknas $y_2 - y_1$,

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

Definition: Uttrycket $f'(x_1)(x_2 - x_1)$ kallas **differential** till $f(x)$ i punkten x_1 och betecknas $df(x_1)$. Alltså

$$df(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Anmärkning: Låt $y = f(x)$. Eftersom $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1)$, har vi

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \approx f'(x_1) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \approx f'(x_1)(x_2 - x_1) = df(x)$$

Alltså, $\Delta f(x) \approx df(x)$ eller kortare $\Delta y \approx dy$.

Uppgift 1. Låt $f(x) = x^3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.1$. Bestäm differentialen i punkten x_1 .

Lösning: $\Delta x = x_2 - x_1 = 0.1$, $f'(x) = 3x^2$ och $f'(x_1) = 3$

Därför $df(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) = 3 \cdot 0.1 = 0.3$

Andra beteckningar:

i) Om vi betecknar $\Delta x = x_2 - x_1$ då är differentialen

$$df(x_1) = f'(x_1)\Delta x$$

ii) Vi betraktar oftast en godtycklig men fix punkt x , då är

$$df(x) = f'(x)\Delta x$$

differentialen i punkten x .

iii) Om vi betraktar funktionen $f(x) = x$ då är differentialen $df(x) = f'(x)\Delta x = 1\Delta x = \Delta x$.

Därmed kan vi, om x är en oberoende variabel, skriva

$$dx = \Delta x$$

och därför kan en differential skrivas som

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Uppgift 2. Låt $f(x) = \arctan x$, Bestäm ett uttryck för differentialen i en godtycklig punkt x då $\Delta x = 0.2$.

Lösning: $df(x) = f'(x)\Delta x = \frac{1}{x^2 + 1} 0.2 = \frac{0.2}{x^2 + 1}$

Uppgift 2. Låt $f(x) = x^5$, Bestäm ett uttryck för differentialen i en godtycklig (men fixt) punkt x och godtyckligt Δx .

Lösning: $df(x) = f'(x)\Delta x = 5x^4\Delta x$

Uppgift 3. Bestäm ett uttryck för differentialen till $f(x)$ i en godtycklig (men fixt) punkt x om

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \sin(x^2 + 4x + 5)$

c) $f(x) = \ln(x^5 + 4x + 3)$

d) $f(x) = \arcsin(x^3 + 8)$

e) $f(x) = \arctan(x^2 + 4x + 5)$

e) $f(x) = xe^x$

Svar: a) $df(x) = \cos x dx$

b) $df(x) = (2x + 4)\cos(x^2 + 4x + 5) dx$

c) $df(x) = \frac{5x^4 + 4}{x^5 + 4x + 3} dx$

d) $df(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{1 - (x^3 + 8)^2}} dx$

e) $df(x) = \frac{2x + 1}{1 + (x^2 + 4x + 5)^2} dx$

f) $df(x) = (1 + x)e^x dx$