Crash Course Envarre2- Differentialekvationer

Mattehjälpen

Maj 2018

Contents

1 Introduktion

I den här CC-föreläsningen är målet att ta upp dem vanligaste typerna av diffekvationer som man kan stöta på i kursen och illustrera varför man löser dem som man gör. Mycket vikt kommer läggas vid att försöka lära oss känna igen vilken typ av diffekvation som är given.

I denna föreläsning kommer vi beröra

- Integrerande faktor
- Separabla diffekvationer
- Homogen- och partikulärlösning för linjär diffekvation
- Lösning av linjära diffekvationer med e^{kx}, $\sin kx$ eller $\cos kx$ i högerledet
- Förskjutningsregeln
- Integralekvationer
- Homogena diffekvationer
- Eulerekvationer

2 Integrerande faktor

En diffekvation som är på formen

$$y'(x) + g(x)y(x) = h(x) \tag{1}$$

löses ofta med hjälp av det som kallas för integrerande faktor.

Idé: Skriv om vänsterledet så att det är derivatan av produkt med $y(x)$ och en annan funktion som faktorer. Sätt $G(x) =$ en primitiv till $g(x)$.

$e^{G(x)}$ kallas den "integrerande faktorn". Multiplicera (1) med den integrerande faktorn.

$$e^{G(x)}y'(x) + e^{G(x)}g(x)y(x) = e^{G(x)}h(x) \tag{2}$$

Vänsterledet i (2) kan nu skrivas som

$$\text{VL} = \frac{d}{dx}\left(y(x)e^{G(x)}\right)$$

Integrera med avseende på x.

$$y(x)e^{G(x)} = \int h(x)e^{G(x)}dx$$

Lös sedan ut $y(x)$ och du får

$$y(x) = \frac{\int h(x)e^{G(x)}dx}{e^{G(x)}}$$

Exempel: Lös diffekvationen

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x+1},\ x > 0 \tag{3}$$

Vi noterar att diffekvationen är på formen som gör att den kan lösas med integrerande faktor. $g(x) = -\frac{1}{x}$ och en primitiv till denna funktion är $G(x) = -\ln x$. Vi får att den integrerande faktorn blir

$$\text{IF} \ = \ e^{G(x)} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

Mulitplicerar (3) med IF och får

$$\frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2} = \frac{1}{x(x+1)} \Leftrightarrow y(x) \cdot \frac{1}{x} = \int \frac{dx}{x(x+1)} = /\text{PBU}/ = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{y(x)}{x} = \ln|x| - \ln|x+1| + C \Leftrightarrow y(x) = x \left(\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C \right)$$

Med ett begynnelsevillkor skulle exakt en lösningskurva kunna bestämmas.

3 Separabla diffekvationer

En diffekvation som kan skrivas enligt (4) kallas separabel.

$$g(y) \cdot \frac{dy}{dx} = h(x) \tag{4}$$

Integrera m.a.p. x.

$$\int g(y) \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx = \int g(y) dy = \int h(x) dx$$

Du behöver inte lägga till två obestämda konstanter då du räknar ut integralerna. Du kan se det som att du har flyttat över den ena konstanten till andra ledet och att den då är inbakad i andra konstanten. Lös sedan ut $y(x)$.

Exempel: (sid 388)

$$xy' = y^2 + 1,\ x > 0,\ y(1) = 1 \tag{5}$$

Försöker skriva (5) så att ekvationen är på formen specificerad i (4).

$$xy' = y^2 + 1 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{y^2+1}}_{g(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{h(x)} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\arctan y = \ln|x| + C,\ (x > 0) \Rightarrow y = \tan(\ln x + C) \tag{6}$$

$y(1) = 1$ ger $\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \ln 1 + C \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{4}$
Alltså gäller,

$$y(x) = \tan\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Funktionen blir definierad för $e^{\frac{-3\pi}{4}} < x < e^{\frac{\pi}{4}}$. Detta för att $-\frac{\pi}{2} < \arctan y < \frac{\pi}{2}$ och det ger i (6) att $\ln x + \frac{\pi}{4}$ måste befinna sig i samma intervall, vilket ger givna gränser för x.

4 Linjära diffekvationer

4.1 Homogena lösningar till linjär diffekvation

Man får den homogena lösningen till en linjär diffekvation med konstanta koefficienter genom att hitta de $y(x)$ för vilka du får 0 som resultat.

$$y'' - 3y' + 2y = x$$

är en diffekvation vars homogen lösning y_h ges av lösningarna till (7).

$$y'' - 3y' + 2y = 0. \tag{7}$$

För att få fram den homogena lösningen, lös den karakteristiska ekvationen, $P(r) = 0$. $P(r)$ kallas för det karakteristiska polynomet och P är en funktion.

$$P(r) = r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r-2)(r-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \text{eller} \\ r = 1 \end{cases}$$

Den homogena lösningen kommer i detta fall kunna skrivas enligt (8), där r_1 och r_2 är lösningarna till den karakteristiska ekvationen.

$$y_h = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \tag{8}$$

OBS! r_1 och r_2 hade i detta fall algebraisk multiplicitet 1 och därmed kommer det endast bli en obestämd konstant som del av koefficienten för $e^{r_1 x}$ och $e^{r_2 x}$.

Nedan följer några exempel på hur det kan bli. Algebraisk multiplicitet förkortas *am*.

En diffekvation har följande karakteristiska ekvation:

$$(r-2)^3(r-1)^2(r+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} r=2 & (\text{am}=3) \\ r=1 & (\text{am}=2) \\ \text{eller} & \\ r=-1 & (\text{am}=1) \end{cases}$$

Den homogena lösningen till diffekvationen blir

$$y_h = (Ax^2+Bx+C)e^{2x} + (Dx+E)e^x + Fe^{-x}$$

Lägg märke till de olika gradtalen hos polynomen som blir koefficienter för exponentialfunktionerna och koppla dessa gradtal till den alegebraiska multipliciteten för respektive lösning till den karakteristiska ekvationen.

Här har vi en annan karakteristisk ekvation.

$$(r-i)(r+i)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} r=i \\ \text{eller} \\ r=-i \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y_h &= Ae^{ix}+Be^{-ix} = /e^{kix} = \cos kx + i\cdot \sin kx/ \\ &= A(\cos x + i\sin x) + B(\cos(-x) + i\sin(-x)) \\ &= A\cos x + B\cos(-x) + i(A\sin x + B\sin(-x)) \\ &= \cos x\,\underbrace{(A+B)}_{C} + \sin x\,\underbrace{i(A-B)}_{D} = C\cos x + D\sin x, C, D\ \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Om man skriver om den homogena lösningen enligt ovan skriver man den på *reell form*. Fås komplexa lösningar till den karakteristiska ekvationen är det helt okej att på en gång skriva upp den homogena lösningen på reell form.

Ett sista exempel...

$$(r-2-3i)(r-2+3i)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} r=2+3i \\ \text{eller} \\ r=2-3i \end{cases} \Rightarrow\ y_h = e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$$

4.2 Partikulärlösning

Den allmänna lösningen till en linjär diffekvation med konstanta koefficienter kan skrivas på formen $y_a = y_h + y_p$, där y_p är partikulärlösningen, dvs en speciell lösning.

Beroende på hur högerledet ser ut i diffekvationen görs olika ansatser. Vi syftar på HL som det led som inte innehåller y, y' etc.

Ett tips är att alltid börja med att bestämma den homogena lösningen till diffekvationen så att den inte glöms bort.

4.2.1 HL innehåller ett polynom

Exempel: $y'' + 6y' + 9y = x^2 + 3$

Börja med att bestämma den homogena lösningen.

Vi söker sen en speciell funktion som uppfyller diffekvationen ovan och eftersom det endast är konstanta koefficienter i ekvationen, en mix av olika derivator av y samt ett HL som innehåller ett polynom så är det rimligt att ansätta
$y_p =$ något polynom. I detta fall ser vi att polynomet i högerledet är av grad två och vi har med y oderiverad i VL, därmed räcker det att ansätta den partikulära lösningen som ett andragradspolynom. Hade den lägsta derivatan vi haft med i VL varit y' hade vi höjt gradtalet på det polynom vi ansätter y_p som med ett.

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \tag{9}$$

Bestäm alla derivator som finns i VL utgåendes från din ansats.

$$y_p' = 2Ax + B \tag{10}$$

$$y_p'' = 2A \tag{11}$$

Stoppa in (9), (10) och (11) i VL och identifiera därefter koefficienter. Koefficienten framför tex x^2 måste vara samma i VL som i HL för att det ska kunna vara samma polynom, osv.

$$\begin{aligned} 2A + 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx + C) &= x^2 + 3 \Leftrightarrow \\ x^2 \cdot \underbrace{(9A)}_{1} + x \cdot \underbrace{(12A + 9B)}_{0} + \underbrace{(2A + 6B + 9C)}_{3} &= x^2 + 3 \end{aligned}$$

Koefficient-identifikation ger:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 9A & & & & & = & 1 \\ 12A & + & 9B & & & = & 0 \\ 2A & + & 6B & + & 9C & = & 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} A & = & 1/9 \\ B & = & -4/27 \\ C & = & 11/27 \end{array} \right.$$

Träna själv

Gör ansats för	Exempel på ansats
i. $y'' - 2y' + y = 4$	i. $y_p = C$
ii. $y'' - 3y' = x^2 + 3x$	ii. $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$
iii. $y'' + y = 2x$	iii. $y_p = Ax$

Observera! Du kan aldrig göra en för stor ansats, men du kan göra en för liten. Om du gör en för stor ansats kommer du få att en del koefficienter blir 0 men du kommer fortfarande fram till rätt svar.

4.2.2 HL innehåller e^{kx}

Exempel:

$$y'' + 2y' - 8y = e^{5x} \tag{12}$$

Börjar med att ta fram den homogena lösningen genom att lösa den karakteristiska ekvationen.

$$P(r) = r^2 + 2r - 8 = (r+4)(r-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = -4 \\ \text{eller} \\ r = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_h = Ce^{-4x} + De^{2x},\ C, D \in \mathbb{R}.$$

Därefter återstår att bestämma en partikulärlösning y_p. Då högerledet innehåller e^{kx} (där k kan vara antingen reellt eller komplext) är ett standardtrick att ansätta $y_p = ze^{kx}$, där $z(x)$ är någon funktion. I detta fall får vi $y_p = ze^{5x}$.

I funktionen $P(r) = (r+4)(r-2)$, som ger oss det karakteristiska polynomet, kan vi stoppa in en deriveringsoperator D istället för r och det gör att vi kan skriva om diffekvationen på ett bekvämt sätt som sedan också tillåter att vi använder oss av förskjutningsregeln.

$$P(D)y_p = (D+4)(D-2)y_p = /y_p = ze^{5x}/ = (D+4)(D-2)z \quad e^{5x} = e^{5x} \Leftrightarrow$$

$$e^{5x}(D+4+5)(D-2+5)z = e^{5x} \Leftrightarrow$$

$$(D+9)(D+3)z = (D^2 + 12D + 27)z = z'' + 12z' + 27z = 1$$

Nu har vi istället en diffekvation i $z(x)$ och i högerledet finns ett polynom, så då kan vi få fram en partikulärlösning genom att göra en lämplig polynomansats. Ansätter $z = C \Rightarrow$

$$27C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{27} \Rightarrow z(x) = \frac{1}{27} \Rightarrow y_p(x) = z(x)e^{5x} = \frac{e^{5x}}{27}$$

Slutligen ges den allmänna lösningen av (13).

$$y_a = y_h + y_p = Ce^{-4x} + De^{2x} + \frac{e^{5x}}{27},\ C, D \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

4.2.3 HL innehåller sinusfunktion

Exempel:

$$y'' - 2y' + y = \sin 2x \tag{14}$$

Den homogena lösningen till (14) bestäms som vanligt och vi fokuserar nu på hur vi får fram en partikulärlösning till (14). I denna kurs gås två olika sätt igenom varav det ena alltid funkar (men brukar upplevas som lite jobbigare) och det andra funkar ibland. Vi börjar med att kika på det som endast funkar ibland.

1) Trigonometrisk ansats

Om vi har en linjär diffekvation med konstanta koefficienter och en sinus- eller cosinusfunktion (med argument kx) i högerledet så är det rimligt att anta att partikulärlösningen kommer vara på formen $y_p = A\sin kx + B\cos kx$. Detta pga att om man deriverar en sinus-funktion så får man en cosinus-funktion, och omvänt. En rimlig partikulärlösning-ansats till (14) ses i (15).

$$y_p = A\sin 2x + B\cos 2x \tag{15}$$

Gör sedan liknande som då det var ett polynom i högerledet. Det ska sluta med att vi gör en koefficientidentifikation och löser ett ekvationssystem för att bestämma A och B.

$$y_p' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x \tag{16}$$

$$y_p'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x \tag{17}$$

Insättning av (15), (16) och (17) i (14) ger oss två ekvationer för A och B i och med att koefficienterna framför $\sin 2x$ och $\cos 2x$ måste vara demsamma i vänster och höger led för att y_p ska vara en lösning till diffekvationen.

$$\begin{aligned} &-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - 2(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) + A\sin 2x + B\cos 2x \\ &= \sin 2x\underbrace{(-3A + 4B)}_{=1} + \cos 2x\underbrace{(-4A - 3B)}_{=0} = 1\cdot\sin 2x \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} -3A & + & 4B & = & 1 \\ -4A & - & 3B & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} A & = & -3/25 \\ B & = & 4/25 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$y_p = -\frac{3}{25}\sin 2x + \frac{4}{25}\cos 2x$$

Sen är dock frågan, när funkar det inte att göra på det här sättet?

Exempel:

$$y'' + 9y = \cos 3x \tag{18}$$

För att bestämma den homogena lösningen börjar vi med att lösa den karakteristiska ekvationen.

$$r^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (r - 3i)(r + 3i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 3i \\ \text{eller} \\ r = -3i \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_h = A \sin 3x + B \cos 3x \tag{19}$$

Om vi utifrån att titta på hur VL i (18) ser ut så hade vi när vi sökt en partikulärlösning försökt med trigansatsen $y_p = A \sin 3x + B \cos 3x$, men vi ser nu att den ansatsen är exakt densamma som den homogena lösningen. Därmed är det omöjligt att det är en partikulärlösning. Så alltså, om du utifrån diffekvationens utseende skulle göra samma ansats som du får som homogen lösning (när den är skriven på reell form) då behöver du göra på det andra sättet, som alltid funkar i dessa sammanhang.

2) Lösa diffekvation med komplex exponentialfunktion i HL

Vi har tidigare gått igenom hur man löser en diffekvation med e^{kx} i högerledet och i det exemplet som då löstes var k ett reellt tal. Det är dock inte nödvändigt utan k kan lika gärna vara komplext och man gör fortfarande på samma sätt. Ett samband vi kommer utnyttja för att hitta en partikulärlösning till (18) är (20).

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx \tag{20}$$

Särskilt gäller att $\sin kx = \mathrm{Im}(e^{ikx})$ och $\cos kx = \mathrm{Re}(e^{ikx})$

Med anledning av detta studerar vi nu istället en diffekvation med liknande vänsterled som (18) men med en komplex exponentialfunktion i HL. Sen löser vi denna diffekvation på samma sätt som vi hade löst (12) men när vi är klara tar vi sen real- eller imaginärdelen av lösningen beroende på vad det var vi hade i högerledet från början. I (18) har vi en cosinus och därmed tar vi realdelen av partikulärlösningen vi får fram till (21), för att få en partikulärlösning till (18).

$$u'' + 9u = e^{3ix} \tag{21}$$

Gör ansatsen $u = ze^{3ix}$. Från tidigare vet vi att $P(r) = (r - 3i)(r + 3i)$.

$$P(D)u_p = (D - 3i)(D + 3i)u_p = /u_p = ze^{3ix}/ =$$
$$(D - 3i)(D + 3)ze^{3ix} = e^{3ix} \Leftrightarrow$$
$$e^{3ix}(D - 3i + 3i)(D + 3i + 3i)z = e^{3ix} \Leftrightarrow D(D + 6i)z = 1 \Leftrightarrow$$

$$z'' + 6iz' = 1 \tag{22}$$

Vi har nu reducerat problemet till att finna en partikulärlösning till en linjär diffekvation med konstanta koefficienter. Sätt t.ex. $z_p = Cx$. $z'_p = C$ och det ger i (22)

$$\begin{aligned}
&6iC = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{6i} = -\frac{i}{6} \Rightarrow z_p = -\frac{ix}{6} \Rightarrow \\
&u_p = -\frac{ix}{6}e^{3ix} = -\frac{ix}{6}(\cos 3x + i\sin 3x) \\
&\quad = -\frac{ix}{6}\cos 3x + \frac{x}{6}\sin 3x
\end{aligned}$$

Vi har att $y_p = \mathrm{Re}(u_p) = \frac{x}{6}\sin 3x$. Slutligen gäller,

$$y_a = y_h + y_p = A\sin 3x + B\cos 3x + \frac{x}{6}\sin 3x$$

4.3 Superpositionsprincipen

Då man löser linjära diffekvationer och har ett HL bestående av flera termer kan man söka partikulärlösning för varje term separat och sedan lägga ihop dessa, och den sammanlagda partikulärlösningen kommer garanterat att vara en partikulärlösning till den ursprungliga diffekvationen. Denna egenskap kallas för superpositionsprincipen.

Exempel:

$$y'' + 2y' - 8y = e^{5x} - 1 \tag{23}$$

(23) har flera termer i HL så vi väljer att söka partiklärlösning för VL lika med en term i taget.

$$y'' + 2y' - 8y = e^{5x} \tag{24}$$

$$y'' + 2y' - 8y = -1 \tag{25}$$

$y_{p_1} = \frac{e^{5x}}{27}$ är en partikulärlösning till (24).

$y_{p_2} = \frac{1}{8}$ är en partikulärlösning till (25).

Därmed gäller att en partikulärlösning till (23) är $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{e^{5x}}{27} + \frac{1}{8}$

4.4 Högre ordningens diffekvationer

Exempel:

$$y^{(4)} + y^{(3)} - y'' - y' = x^2 - 2x + 6 \tag{26}$$

Denna linjära diffekvation med polynom i högerledet löses på liknande sätt som om du haft tex högst andraderivatan i vänsterledet. För att få fram en partikulärlösning så gör du en polynomansats. Det som kan bli lite knepigare är att lösa den karakteristiska ekvationen. I detta fall blir den

$$r^4 + r^3 - r^2 - r = r(r^3 + r^2 - r - 1) = 0 \tag{27}$$

För att lösa tredje- och fjärdegradsekvationer har vi inget allmänt tillvägagångssätt så för att lösa (27) behöver en rot gissas och sedan får man köra polynomdivision för att fullständigt faktorisera polynomet. Därefter kan rötterna till ekvationen avläsas, samt vad respektive rot har för algebraisk multiplicitet.

5 Integralekvationer

Exempel:

$$y(x) + \int_x^1 \frac{2t \cdot y(t)}{1+t^2}\,dt = 2x - 5 \tag{28}$$

Det gäller att $\int_a^a f(x)dx = 0$ och det innebär i detta fall att det finns ett gömt bivillkor i ekvationen. Stoppa in $x = 1$ för att få fram det.

$$y(1) + \int_1^1 \frac{2t \cdot y(t)}{1+t^2}\,dt = 2 \cdot 1 - 5 \Leftrightarrow y(1) = -3$$

Derivera sedan (28) mha analysens huvudsats.

$$y'(x) - \frac{2x \cdot y(x)}{1+x^2} = 2 \tag{29}$$

Vi ser nu att vi har en diffekvation på formen $y'(x) + g(x)y(x) = h(x)$ och därmed kan den lösas med integrerande faktor. $g(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$ och en primitiv till $g(x)$ är $G(x) = -\ln|\underbrace{1+x^2}_{>0}| = -\ln(1+x^2)$

Den integrerande faktorn, IF, blir därmed

$$\text{IF} = e^{G(x)} = e^{-\ln(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Multiplicera (29) med IF och lös sedan som vanligt.

$$\frac{y'(x)}{1+x^2} - \frac{2x \cdot y(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$y(x) = (1+x^2)(2\arctan x + C)$$

Med $y(1) = -3$ fås sedan $C = -\frac{\pi+3}{2}$

6 Homogen diffekvation

En diffekvation på formen $y'(x) = f(\frac{y}{x})$ kallas homogen och den kan överföras till en separabel diffekvation via funktionsbytet $z(x) = \frac{y(x)}{x}$.

Exempel:

$$x^2 y' = 3xy - 2y^2 \tag{30}$$

Vi antar att $x \neq 0$ och kan då skriva (30) som

$$y' = 3\frac{y}{x} - 2\frac{y^2}{x^2} \tag{31}$$

Med funktionsbytet $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ kan höger led i (31) skrivas

$$\text{HL} = 3z - 2z^2$$

Vi måste dock uttrycka $y'(x)$ i z och x.

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x) = z(x) \cdot x$$

Derivera $y(x)$ med produktregeln

$$y'(x) = z'(x) \cdot x + z(x)$$

(31) kan nu skrivas

$$z' \cdot x + z = 3z - 2z^2 \Leftrightarrow z' \cdot x = 2z - 2z^2 = 2z(1-z) \Rightarrow /\text{Antar att } z \neq 0,\, 1/ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2z(1-z)} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \tag{32}$$

Observera att diffekvationen i (32) endast är separabel om $z \neq 0, 1$, de övriga fallen måste testas separat. $z = 1$ motsvarar $y = x$ och $z = 0$ motsvarar $y = 0$. Detta test gör vi dock sist. Integrera nu (32) med avseende på x.

$$\int \frac{dz}{2z(1-z)} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2z}{1-z} \right| = \ln |x| + D = /D = \ln C/ = \ln |Cx|$$
$$\Leftrightarrow \ln \left| \frac{2z}{1-z} \right| = \ln |C^2 x^2|$$

Med $E = C^2$ fås att

$$\ln \left| \frac{2z}{1-z} \right| = \ln |Ex^2| \Leftrightarrow \frac{2z}{1-z} = \pm Ex^2 \Leftrightarrow /\text{Tecken på konstant spelar ej roll, } B = \pm E/ \Leftrightarrow$$
$$2z = Bx^2 - Bx^2 z \Leftrightarrow z = \frac{Bx^2}{2 + Bx^2} \Rightarrow /y = z \cdot x/ \Rightarrow y(x) = \frac{Bx^3}{2 + Bx^2}$$

Att skriva om konstanten D som en ln-term är ett trick som underlättar beräkningarna. Det funkar eftersom ln:s värdemängd är $]-\infty, \infty[$.

Vi testar sen om $z = 0$ ($y = 0$) och $z = 1$ ($y = x$) är lösningar till (30). För $y = 0$ får vi

$$\mathrm{VL} = x^2 \cdot 0 = 0$$
$$\mathrm{HL} = 3x \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0$$

VL = HL för $y = 0$ och därmed är det en lösning till (30). (Denna lösning kan dock anses vara trivial och det är inte säkert att den skrivs ut)

För $y = x$ får vi

$$\mathrm{VL} = x^2 \cdot 1 = x^2$$
$$\mathrm{HL} = 3x \cdot x - 2 \cdot x^2 = x^2$$

VL = HL, dvs, även $y = x$ är en lösning till (30).

Svar: $y(x) = \frac{Bx^3}{2+Bx^2}$ eller $y(x) = x$.

7 Eulerekvationer

Diffekvationer på formen $x^n y^n + c_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + c_0 y = f(x)$ kan formas om till en diffekvation med konstanta koefficienter genom att införa en ny variabel. Antag att $x > 0$. Sätt $t = \ln x$ och $y(x) = z(t(x))$. När man sen uttrycker y:s derivator i $z(t)$ och x framkommer ett samband som vi har mycket användning av vid lösning av såna här diffekvationer. Om vi istället hade haft villkoret $x < 0$ hade vi skapat variabeln $t = \ln(-x)$.

Exempel:

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 2x^2,\ x > 0 \tag{33}$$

Det här är en diffekvation som vid en första anblick kan verka lockande att försöka lösa genom att göra en potensserieansats, men pga att man har villkoret $x > 0$ hintar det om att vi snarare ska approacha denna som en Eulerekvation.

Vi sätter $t = \ln x$ och $y(x) = z(\underbrace{\ln x}_{t(x)})$, $x > 0$. Vi har att

$$t'(x) = \frac{1}{x},\ t''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

När vi deriverar $y(x) = z(t(x))$ måste vi använda kedjeregeln eftersom $t(x)$ är en inre funktion. Observera! Ibland skriver jag $z(t)$ och ibland $z(t(x))$. Dem betyder exakt samma sak men jag väljer det andra skrivsättet om jag vill betona att t är en funktion av x, så att inga inre derivator glöms bort.

$$y'(x) = z'(t) \cdot t'(x) = z'(t) \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow\ x \cdot y'(x) = z'(t)$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{d}{dx}\left(z'(t(x)) \cdot \frac{1}{x}\right) = \underbrace{z''(t) \cdot t'(x)}_{\frac{d}{dx}(z'(t))} \cdot \frac{1}{x} + z'(t) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{z''(t)}{x^2} - \frac{z'(t)}{x^2} = \frac{z''(t) - z'(t)}{x^2} \Leftrightarrow x^2 y''(x) = z''(t) - z'(t) \end{aligned}$$

Vi kan nu skriva om (33) uttryckt i $z(t)$. Det är viktigt att vi också uttrycker alla eventuella x som kvartstår i t så att vi helt byter variabel för diffekvationen. $t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t$.

$$\underbrace{x^2 y''(x)}_{z''(t) - z'(t)} - 2\underbrace{xy'(x)}_{z'(t)} + 2\underbrace{y(x)}_{z(t)} = 2\underbrace{x^2}_{e^{2t}}$$

Alltså, vår ekvation i t blir

$$z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = 2e^{2t} \tag{34}$$

(34) är en diffekvation som vi väl känner till hur vi löser. Börja med att bestämma den homogena lösningen och finn sen en partikulärlösning enligt hur vi löser (12). Löser man (34) på vanligt sätt får man

$$\begin{aligned} y_a &= z_a = z_h + z_p = Ce^{2t} + De^t + 2te^{2t} = /t = \ln x/ \\ &= Cx^2 + Dx + x^2 \ln x^2 \end{aligned}$$