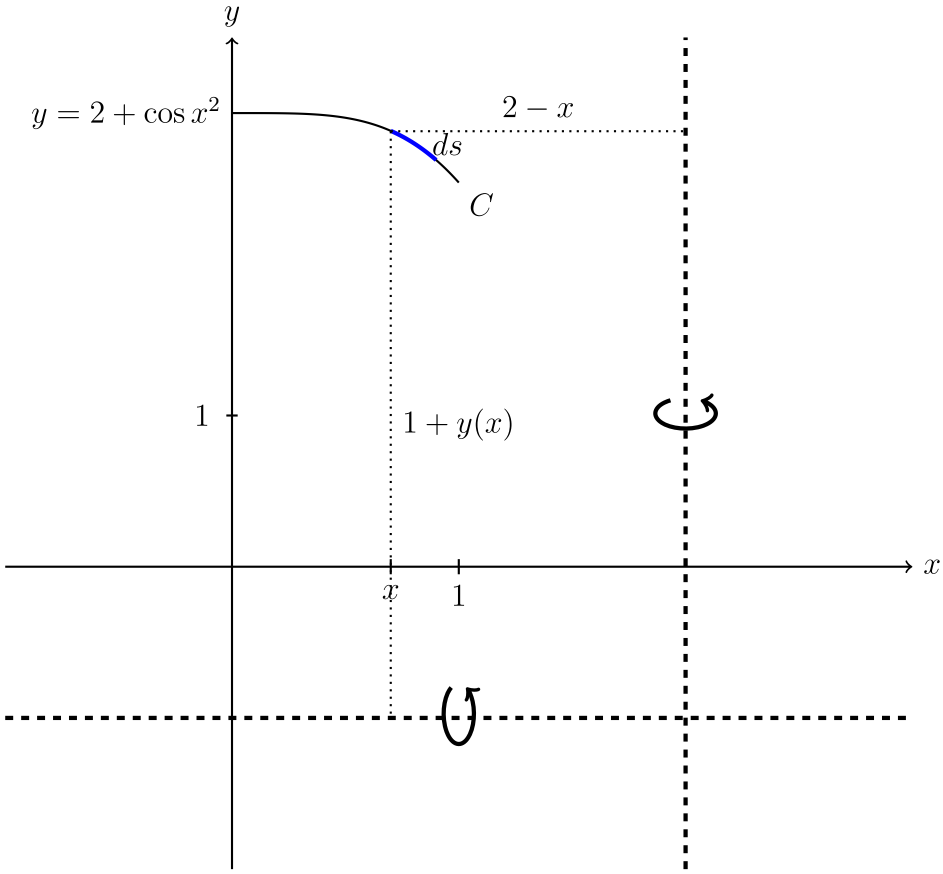
Lösningsförslag envariabelanalys 2 2020-06-05

1. Bågelementet finner vi enligt

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \sqrt{1 + (-2x\sin(x^2))^2}\, dx = \sqrt{1 + 4x^2\sin^2(x^2)}\, dx.$$



(a) Kurvlängden för $y = \cos(x^2) + 2$ då $0 \le x \le 1$ blir

$$L = \int_0^1 ds(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2\sin^2(x^2)}\, dx.$$

(b) Avståndet från bågelementet $ds(x)$ till rotationsaxeln $y = -1$ ges av $1 + \cos(x^2) + 2$. Således blir rotationsarean

$$2\pi \int_0^1 (3 + \cos(x^2))\, ds = 2\pi \int_0^1 (3 + \cos(x^2))\sqrt{1 + 4x^2\sin^2(x^2)}\, dx.$$

(c) Avståndet från bågelementet $ds(x)$ till rotationsaxeln $x = 2$ ges av $2 - x$, så rotationsarean blir

$$2\pi \int_0^1 (2 - x)\, ds = 2\pi \int_0^1 (2 - x)\sqrt{1 + 4x^2\sin^2(x^2)}\, dx.$$

Svar: Se ovan.

2. (a) Standardutvecklingarna

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + O(t^6)$$

och

$$\sin u = u - \frac{u^3}{6} + O(u^5)$$

visar att, med $u = 2x$ och $t = \sin u$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \cos\left(2x - \frac{4x^3}{3} + O(x^5)\right) + 2 - x^2 \\
&= x^2\left(1 - \frac{1}{2}\left(2x - \frac{4x^3}{3} + O(x^5)\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(2x + O(x^3)\right)^4 + O((O(x))^6)\right) + 2 - x^2 \\
&= x^2\left(1 - \frac{1}{2}\left(4x^2 - \frac{16x^4}{3} + O(x^6)\right) + \frac{1}{24}\left(16x^4 + O(x^6)\right) + O(x^6)\right) + 2 - x^2 \\
&= x^2\left(1 - 2x^2 + \frac{10x^4}{3} + O(x^6)\right) + 2 - x^2 \\
&= 2 - 2x^4 + \frac{10x^6}{3} + O(x^8).
\end{aligned}$$

(b) Eftersom

$$f(x) = 2 - 2x^4 + O(x^6) = 2 - x^4\left(2 + O(x^2)\right)$$

så ser vi att för x nära 0 så gäller att $f(x) < 2 = f(0)$ om $x \neq 0$ eftersom $x^4 > 0$ så $x^4\left(2 + O(x^2)\right) > 0$ för $x \neq 0$ (små x). Således har $f(x)$ ett lokalt maximum då $x = 0$.

(c) Eftersom

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + O(x^7)$$

så följer det av entydigheten för Maclaurinutvecklingar att

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = \frac{10}{3} \quad \Leftrightarrow \quad f^{(6)}(0) = \frac{10 \cdot 6!}{3} = 20 \cdot 5! = 2400.$$

Svar: (a) $2 - 2x^4 + \dfrac{3x^6}{10} + O(x^8)$ (b) Ett lokalt maximum. (c) $f^{(6)}(0) = 2400$.

3. Vi börjar med att bestämma konvergensradien R för serien. Eftersom

$$\left|\frac{(-1)^k x^{4k}}{4^k\sqrt{1+3k}}\right|^{1/k} = \frac{|x|^4}{4}(1+3k)^{-1/(2k)} = \frac{|x|^4}{4}e^{-\frac{1}{2k}\ln(1+3k)} \to \frac{|x|^4}{4}, \quad \text{då } k \to \infty,$$

så är serien enligt rotkriteriet absolutkonvergent då

$$\frac{|x|^4}{4} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \sqrt{2}$$

och divergent om $|x| > \sqrt{2}$. Kvar att undersöka är punkterna $x = \pm\sqrt{2}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\pm\sqrt{2})^{4k}}{4^k\sqrt{1+3k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{1+3k}}.$$

Eftersom termernas belopp i denna serie avtar mot noll, dvs $1/\sqrt{1+3(k+1)} < 1/\sqrt{1+3k}$ och $1/\sqrt{1+3k} \to 0$, samt att serien är alternerande, följer det att serien är konvergent enligt Leibniz kriterium.

Om $x = 1$ är

$$f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k\sqrt{1+3k}} = 1 - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k\sqrt{1+3k}} = \frac{7}{8} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k\sqrt{1+3k}}.$$

Således följer det att

$$\left| f(1) - \frac{7}{8} \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k\sqrt{1+3k}} \right| \overset{*}{\leq} \left| \frac{(-1)^2}{4^2\sqrt{1+3\cdot 2}} \right| = \frac{1}{16\sqrt{7}}$$

eftersom serien är alternerande och termernas belopp avtar monotont mot noll. Vi utnyttjar i olikheten markerad med $*$ att vi arbetar med en serie konvergent enligt Leibniz kriterium. Då $16 \cdot \sqrt{7} > 16 \cdot 2 > 30$ så följer det att

$$\left| f(1) - \frac{7}{8} \right| \leq \frac{1}{30}.$$

Svar: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

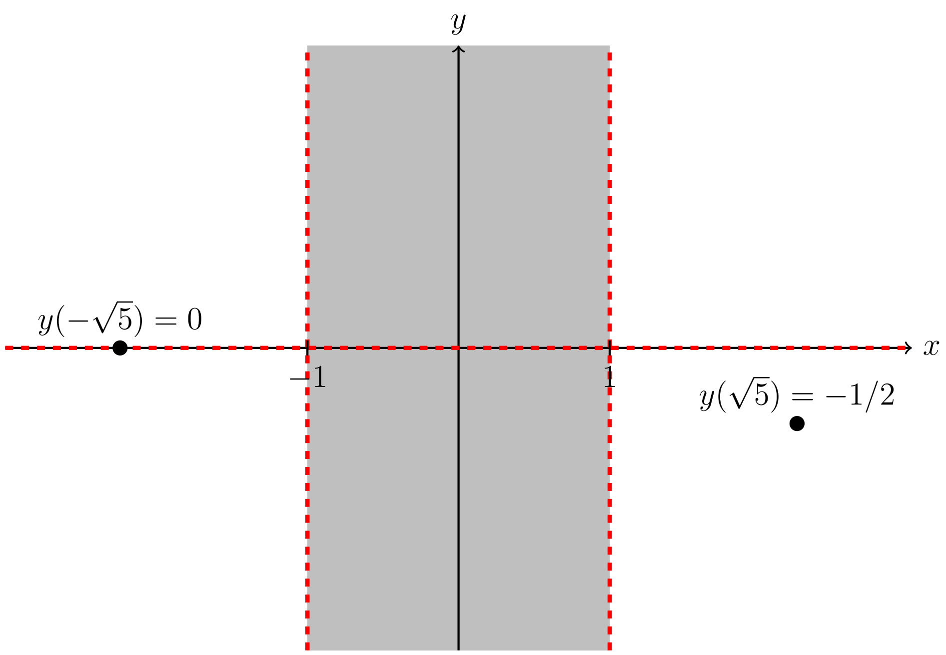
4. Ekvationen är separabel då

$$y'\sqrt{x^2-1} = xy^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y^3} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

så länge $y \neq 0$. Vidare måste $x^2 > 1 \;\Leftrightarrow\; |x| > 1$. Vi antar därför att $y \neq 0$ och att $|x| > 1$ och integrerar båda sidor:

$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{x^2-1} + C.$$

Vi ritar en figur för att få en bild över hur villkoren kommer att påverka. De rödmarkerade streckade linjerna markerar de naturliga avgränsningarna i uppgiften.



(a) Om $y(\sqrt{5}) = -1/2$ så måste

$$-\frac{1}{2\cdot(-1/2)^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2-1} + C = 2 + C \quad \Leftrightarrow \quad C = -4.$$

Vi söker därmed y så att

$$2y^2 = \frac{-1}{C+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{4-\sqrt{x^2-1}} \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{8-2\sqrt{x^2-1}}},$$

vilket går bra om $8 - 2\sqrt{x^2-1} > 0$. Vi vet att $y(\sqrt{5}) = -1/2$, så vi måste välja den negativa lösningen. Dessutom är $\sqrt{5} > 1$, så $x > 1$ är också nödvändigt. Vidare ser vi att

$$8 - 2\sqrt{x^2-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 > \sqrt{x^2-1}$$

så eftersom $x > 1$ så måste vi även kräva att $x < \sqrt{17}$. Den eftersöka lösningen är således

$$y = -\frac{1}{\sqrt{8-2\sqrt{x^2-1}}}, \quad 1 < x < \sqrt{17}.$$

(b) Vi söker en lösning så att $y(-\sqrt{5}) = 0$. Då konstanten $y = 0$ löser ekvationen om $|x| > 1$ (vi ser detta genom att direkt verifiera att $y = 0$ uppfyller ekvationen) så ges den eftersökta lösningen av

$$y = 0, \quad x < -1.$$

Svar: (a) $y = -\dfrac{1}{\sqrt{8-2\sqrt{x^2-1}}}$, $1 < x < \sqrt{17}$ (b) $y = 0$, $x < -1$.

5. Integralen är endast generaliserad i ∞. Detta följer av att integranden är kontinuerlig för $x > 0$ och att

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{(1+x^2)^{1/3}} = 0,$$

så det finns inget problem i $x = 0$. För att fokusera på problemet när $x \to \infty$ så delar vi upp integralen i två delar:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{(1+x^2)^{1/3}}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{(1+x^2)^{1/3}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\ln(1+x)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{(1+x^2)^{1/3}}\,dx. \quad (1)$$

Den första integralen är konvergent enligt ovan (integranden är Riemannintegrabel på $[0,1]$). Vi visar att den andra integralen i (1) är konvergent genom att uppmärksamma att integranden är positiv (för $x > 1$) och att

$$\frac{\ln(1+x)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{(1+x^2)^{1/3}} = \frac{\ln(1+x)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\right)}{x^{2/3}(x^{-2}+1)^{1/3}} = \frac{\ln(1+x)}{x^{2/3}x^{1/2}} \cdot \underbrace{\frac{1+O\left(\frac{1}{x}\right)}{(x^{-2}+1)^{1/3}}}_{\to 1 \text{ då } x\to\infty}.$$

Enligt jämförelsesatsen på gränsvärdesform gäller nu att

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{(1+x^2)^{1/3}}\,dx \text{ är konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^{7/6}}\,dx \text{ är konvergent.}$$

Vi visar att den sista integralen är konvergent. Integranden är positiv och genom partialintegration finner vi att

$$\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^{7/6}}\,dx = \left[-6x^{-1/6}\ln(1+x)\right]_1^\infty + 6\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/6}(1+x)}\,dx$$
$$\leq 6\ln 2 + 6\int_1^\infty \frac{1}{x^{7/6}} < \infty$$

ty $7/6 > 1$ (känd jämförelsefunktion). Alltså kommer även den andra integralen i högerledet av (1) att vara konvergent.

Eftersom båda integralerna i högerledet av (1) är konvergenta så måste även integralen i vänsterledet vara konvergent.

Svar: Konvergent.

Alternativt. Man kan istället för att partialintegrera använda standardgränsvärdet $\frac{\ln x}{x^\alpha} \to 0$ för alla $\alpha > 0$ då $x \to \infty$. Vi kan då skriva

$$\frac{\ln(1+x)}{x^{7/6}} = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x^{14/12}} = \underbrace{\frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^{1/12}}}_{\to 0 \text{ då } x\to\infty} \frac{1}{x^{13/12}} < \frac{1}{x^{13/12}}$$

om x är tillräckligt stort. Då $\frac{13}{12} > 1$ är den aktuella integralen konvergent av samma skäl som ovan.

6. Vi noterar att ekvationen är linjär och av ordning n. Det karakteristiska polynomet blir

$$p(r) = r^n - \binom{n}{1}\alpha r^{n-1} + \binom{n}{2}\alpha^2 r^{n-2} - \binom{n}{3}\alpha^3 r^{n-3} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\alpha^n.$$

Vi känner igen mönstret och kan via binomialsatsen, dvs

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k}b^k,$$

uttrycka detta polynom enligt

$$p(r) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{n-k}(-\alpha)^k = (r-\alpha)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Polynomet har således en rot i $r = \alpha$ med multiplicitet n.

Med $y = e^{\alpha x}z$ ger sedan förskjutningsregeln att ekvationen kan skrivas som

$$P(D)y = (D-\alpha)^n(e^{\alpha x}z) = e^{\alpha x}(D-\alpha+\alpha)^n z = e^{\alpha x}D^n z = e^{\beta x} \quad \Leftrightarrow \quad D^n z = e^{(\beta-\alpha)x}.$$

Den homogena ekvationen $D^n z = 0$ har lösningen $z_h = q(x)$ där $q(x)$ är ett polynom av grad $n-1$ eller lägre. Återstår att hitta en partikulärlösning Vi får två fall

1. $\alpha \neq \beta$:
   Integration av $e^{(\beta-\alpha)x}$ n gånger ger $z_p = \dfrac{1}{(\beta-\alpha)^n}e^{(\beta-\alpha)x}$ vilket i sin tur ger

$$y = e^{\alpha x}(z_h + z_p) = q(x)e^{\alpha x} + \frac{1}{(\beta-\alpha)^n}e^{\beta x}.$$

2. $\alpha = \beta$:

   Integration av $e^{(\beta-\alpha)x} = 1$ n gånger ger $z_p = \dfrac{x^n}{n!}$ vilket i sin tur ger

$$y = e^{\alpha x}(z_h + z_p) = \left(q(x) + \frac{x^n}{n!}\right) e^{\alpha x}.$$

Svar:

$$y(x) = \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}\right) e^{\alpha x} + \frac{e^{\beta x}}{(\beta - \alpha)^n}$$

om $\alpha \neq \beta$ och

$$y(x) = \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + \frac{1}{n!}\, x^n\right) e^{\alpha x}$$

om $\alpha = \beta$.

Alternativt: Det går givetvis även bra att direkt skriva upp de homogena lösningarna

$$y_h(x) = \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}\right) e^{\alpha x}$$

enligt välkänd sats och sedan ansätta $y_p(x) = z(x)e^{\beta x}$. Enligt förskjutningsregeln finner vi att

$$p(D)y_p = p(D)(ze^{\beta x}) = e^{\beta x}p(D+\beta)z = e^{\beta x}(D - \alpha + \beta)^n z,$$

så

$$e^{\beta x} = p(D)(ze^{\beta x}) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = (D - \alpha + \beta)^n z.$$

Vi får nu två fall. Om $\alpha \neq \beta$ så låter vi $z = A$ vara en konstant. Då ser vi att

$$1 = (D - \alpha + \beta)^n A = (\beta - \alpha)^n A \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{(\beta - \alpha)^n}.$$

Om $\alpha = \beta$ så blir

$$1 = D^n z = z^{(n)},$$

så $z = x^n/n!$.