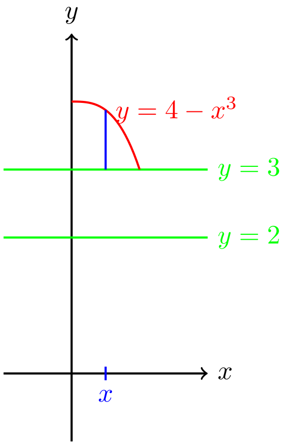
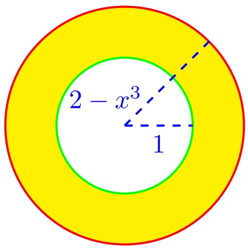
SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2020-03-20

1.





När den blå stolpen i figuren mellan linjen $y = 3$ och kurvan $y = 4 - x^3$ roteras ett varv runt axeln $y = 2$ uppstår en ihålig cirkelskiva med inre radie 1 och yttre radie $2 - x^3$. Denna har således area $\pi \cdot (2 - x^3)^2 - \pi \cdot 1^2 = \pi(3 - 4x^3 + x^6)$. Volymen av rotationskroppen ges av att integrera denna tvärsnittsarea från 0 till 1:

$$\int_0^1 \pi(3 - 4x^3 + x^6)\, dx = \pi \left[3x - x^4 + \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{15\pi}{7}.$$

Svar: $15\pi/7$.

2. Eftersom

$$r^4 - 2r^3 + 5r^2 - 8r + 4 = (r-1)(r^3 - r^2 + 4r - 4) = (r-1)^2(r^2+4) = (r-1)^2(r+2i)(r-2i)$$

får vi att allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$y_h^{(4)} - 2y_h^{(3)} + 5y_h'' - 8y_h' + 4y_h = 0$$

ges av

$$y_h = (C_1 x + C_2)e^x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

(Vi har även $C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x = D_3 e^{2ix} + D_4 e^{-2ix}$, men ovanstående ger oss alla reella lösningar då C_1, C_2, C_3, C_4 är reella.)

Vi gör nu partikuläransatsen $y_p = ax^2 + bx + c$ som ger $y_p' = 2ax + b$, $y_p'' = 2a$ och $y_p^{(3)} = y_p^{(4)} = 0$. Insatt i ekvationen får vi

$$\begin{aligned} y_p^{(4)} - 2y_p^{(3)} + 5y_p'' - 8y_p' + 4y_p &= 0 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot (2a) - 8 \cdot (2ax + b) + 4 \cdot (ax^2 + bx + c) \\ &= 4ax^2 + (4b - 16a)x + (10a - 8b + 4c) = 4x^2 - 16x + 6. \end{aligned}$$

D.v.s.

$$4a = 4, \quad 4b - 16a = -16, \text{ och } 10a - 8b + 4c = 6,$$

som har lösningen

$$a = 1, \quad b = 0 \text{ och } c = -1, \text{ vilket ger } y_p = x^2 - 1.$$

Alltså ges allmänna lösningen av $y = y_h + y_p = (C_1 x + C_2)e^x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + x^2 - 1$.

Bivillkoret ger nu slutligen $y(0) = (C_1 \cdot 0 + C_2)e^0 + C_3 \cos(2 \cdot 0) + C_4 \sin(2 \cdot 0) + 0^2 - 1 = C_2 + C_3 - 1 = 0$. D.v.s. $C_3 = 1 - C_2$

Svar: $y = (C_1 x + C_2)e^x + (1 - C_2)\cos 2x + C_4 \sin 2x + x^2 - 1$, $C_1, C_2, C_4 \in \mathbb{R}$.

3. (a) Eftersom

$$0 \leq \frac{x^2}{x^5 + x^3 + 1} \leq \frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3} \text{ då } x > 1,$$

och vi vet att

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$$

är konvergent följer det enligt jämförelseprincipen att integralen är konvergent.

Svar: Konvergent.

(b) Eftersom

- serien är alternerande,
- termerna $(-1)^k/\sqrt{k+2} \to 0$ då $k \to \infty$,
- termernas absolutbelopp $|(-1)^k/\sqrt{k+2}| = 1/\sqrt{k+2}$ är avtagande,

så följer det av Leibniz kriterium att serien är konvergent. (I detta fall anser vi att det är uppenbart att $1/\sqrt{k+2}$ är avtagande.)

Svar: Konvergent.

(c) Eftersom integralen endast är generaliserad i 0,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\ln(1+x))/x\sqrt{x}}{1/\sqrt{x}} &= \frac{\sin(x + \mathcal{O}(x^2))/x\sqrt{x}}{1/\sqrt{x}} = \frac{\sin(x + \mathcal{O}(x^2))}{x} \\ &= \frac{x + \mathcal{O}(x^2)}{x} = 1 + \mathcal{O}(x) \to 1 \text{ då } x \to 0^+ \quad (0 < 1 < \infty)\end{aligned}$$

och

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

är konvergent, följer det av jämförelseprincipen på gränsvärdesform att integralen är konvergent.

Svar: Konvergent.

4(a). Vi har (eftersom $f^{(n)}(t) = \mathrm{e}^t$ för alla n)

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}t^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}t^4 + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}t^5 = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{\mathrm{e}^\xi t^5}{120}$$

för något ξ mellan 0 och t.

Svar: $f(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{\mathrm{e}^\xi t^5}{120}$ för något ξ mellan 0 och t.

4(b). Med $t = -x$ i formeln ovan får vi

$$\mathrm{e}^{-x} = f(-x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{\mathrm{e}^\xi x^5}{120} = p(x) - \frac{\mathrm{e}^\xi x^5}{120}$$

för något ξ mellan $-x$ och 0 (OBS! inte mellan 0 och x).

Då $0 \leq x \leq 1$ ger oss olikheterna $-1 \leq -x \leq \xi \leq 0$ får vi

$$\left|\mathrm{e}^{-x} - p(x)\right| = \left|-\frac{\mathrm{e}^\xi x^5}{120}\right| = \frac{\mathrm{e}^\xi |x|^5}{120} \leq \frac{\mathrm{e}^0 |-1|^5}{120} = \frac{1}{120} < \frac{1}{100}.$$

Svar: $p(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$.

5. Med
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x},$$
som gäller för alla $|x| < 1$, får vi
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$$
och
$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)x^k = \frac{2}{(1-x)^3}.$$
Vi har nu
$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{\infty} 3(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{\infty} x^k = f''(x) - 3f'(x) + f(x).$$
(a): Med $x = 1/4$ ovan får vi
$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1/4)^k = f''(1/4) - 3f'(1/4) - f(1/4) = \frac{2}{(1-1/4)^3} - 3 \cdot \frac{1}{(1-1/4)^2} + \frac{1}{1-1/4} = \ldots = \frac{20}{27}.$$

Svar: 20/27.

(b): Notera att formeln ovan endast gäller för $|x| < 1$, så vi kan inte tillämpa den med $x = 4$. Denna summa är divergent, vilket kan ses t.ex. av att termerna inte går mot noll: $\lim_{k\to\infty} k^2 4^k = \infty$.

Svar: Divergent.

6. Vi studerar integralekvationen

$$(*) \quad y(x) + \mathrm{e}^x = \int_0^x \exp(y(t) + t)\, dt.$$

Derivation av $(*)$ ger nu därför

$$y' + \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \cdot \mathrm{e}^x \Leftrightarrow y' = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^y - 1)$$

Insättning av $x = 0$ i $(*)$ ger också bivillkoret $y(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow y(0) = -1$. Det faktum att lösningen y är kontinuerlig medför att y är negativ i alla fall lokalt kring $x = 0$. Vi letar nu först efter lösningar som uppfyller $y < 0$, och kan då således dividera med faktorn $\mathrm{e}^y - 1$ (eftersom denna då är < 0), vilket leder oss till:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{e}^y - 1} y' = \mathrm{e}^x & (DE) \\ \\ y(0) = -1 & (BV). \end{cases}$$

Vi får nu

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^y - 1} dy = \int \mathrm{e}^x dx \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{\mathrm{e}^y - 1} - \frac{1}{\mathrm{e}^y} \right) \mathrm{e}^y dy = \mathrm{e}^x + C \Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^{-y} - 1) = \mathrm{e}^x + C.$$

(Ovan använde vi att $y < 0$, vilket ger $\mathrm{e}^{-y} - 1 > 0$.) Detta är ekvivalent med

$$\mathrm{e}^{-y} = \exp(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^C + 1.$$

Insättning av bivillkoret ger nu

$$\mathrm{e}^{-(-1)} - 1 = \mathrm{e}^C \mathrm{e}^1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^C = (\mathrm{e} - 1)\mathrm{e}^{-1}.$$

Vi får nu

$$y = -\ln((\mathrm{e} - 1)\mathrm{e}^{-1}\exp(\mathrm{e}^x) + 1).$$

Denna löser $(**)$ med det givna bivillkoret, och alltså löser den $(*)$, på hela reella linjen (notera att $(\mathrm{e} - 1)\mathrm{e}^{-1}\exp(\mathrm{e}^x) + 1 > 1$ för alla x).

Svar: $y = -\ln((\mathrm{e} - 1)\mathrm{e}^{-1}\exp(\mathrm{e}^x) + 1)$, $-\infty < x < \infty$.

Vid beräkningen av intergalen $\int \frac{1}{\mathrm{e}^y - 1} dy$ ovan kan man också resonera med ett variabelbyte $e^y = t$ som ger $e^y dy = dt$, d.v.s. $dy = dt/t$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\mathrm{e}^y - 1} dy &= \int \frac{1}{(t-1)t} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \ln|t - 1| - \ln|t| = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| = \ln|\mathrm{e}^{-y} - 1| = \ln(\mathrm{e}^{-y} - 1), \end{aligned}$$

där vi använde oss av att $\mathrm{e}^{-y} - 1$ enligt antagande är positivt.