SVAR M.M., ENVARIABELANALYS 2, TATA42, 2019-10-30

1. Ekvationen är en linjär differentialekvation av första ordningen, så vi löser problemet m.h.a. en integrerande faktor. Eftersom $x > 0$ gäller

$$xy' - 2y = x^3 \cos x \Leftrightarrow y' - \frac{2}{x}y = x^2 \cos x.$$

Vidare gäller att $(\ln x^{-2})' = \frac{-2}{x}$, så $\mathrm{e}^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$ är en integrerande faktor.

$$\left(\frac{1}{x^2}y\right)' = \frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = \frac{1}{x^2}\left(y' - \frac{2}{x}y\right) = \frac{1}{x^2}x^2 \cos x = \cos x,$$

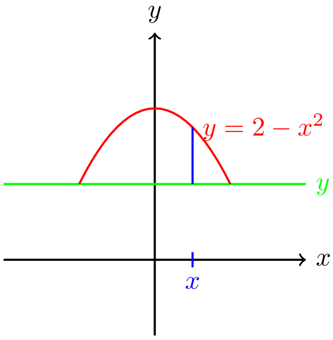
vilket ger att

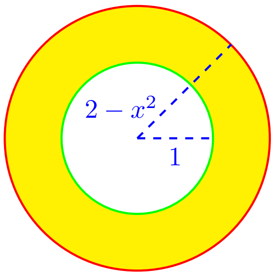
$$\frac{y}{x^2} = \int \cos x \, dx = \sin x + c.$$

$y(\pi) = \pi^3$ ger nu $\frac{\pi^3}{\pi^2} = \sin \pi + c \Leftrightarrow c = \pi$. Så $y = x^2(\pi + \sin x)$.

Svar: $y = x^2(\pi + \sin x)$.

2(a)





När den blå stolpen i figuren mellan linjen $y = 1$ och kurvan $y = 2 - x^2$ roteras ett varv runt x-axeln uppstår en ihålig cirkelskiva med inre radie 1 och yttre radie $2 - x^2$. Denna har således area $\pi * (2 - x^2)^2 - \pi * 1^2 = \pi(3 - 4x^2 + x^4)$. Volymen av rotationskroppen ges av att integrera denna tvärsnittsarea från -1 till 1:

$$\int_{-1}^{1} \pi(3 - 4x^2 + x^4)\, dx = \pi \left[3x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{56\pi}{15}.$$

Svar: $56\pi/15$.

2(b). $x' = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t$, $y' = \cos t - \cos t + t \sin t = t \sin t$. Kurvlängden ges av

$$\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t}\, dt = \int_0^1 \sqrt{t^2}\, dt = \int_0^1 |t| dt = \int_0^1 t\, dt = 1/2.$$

Svar: $1/2$.

3. (a) Vi har att

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4),$$

och

$$\cos r = 1 - \frac{r^2}{2} + \mathcal{O}(r^4).$$

Om vi sedan tillämpar den andra formeln med $r = \mathrm{e}^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)$ (OBS! $r \to 0$ om $x \to 0$) får vi

$$\cos(\mathrm{e}^x - 1) = \cos\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)\right)$$

$$= 1 - \frac{\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)\right)^2}{2} + \mathcal{O}\left(\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^4)\right)^4\right) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^4).$$

Svar: $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \mathcal{O}(x^4)$.

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\mathrm{e}^x - 1) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-x^3}{2} + \mathcal{O}(x^4)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{2} + \mathcal{O}(x)\right) = \frac{-1}{2}.$$

Svar: $-1/2$.

(c)

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) = 1 + x^2\left(\frac{-1}{2} + \mathcal{O}(x)\right).$$

Eftersom $x^2 \geq 0$ och termen $\frac{-1}{2} + \mathcal{O}(x)$ är strängt negativ nära origo, så ser vi att $f(x)$ har ett lokalt maximum i origo.

Svar: Lokalt maximum.

4. $p(r) = r^3 - 5r^2 + 7r - 3$ har en rot i $r = 1$, d.v.s. $p(1) = 0$. Alltså har $p(r)$ en faktor på formen $r - 1$:

$$p(r) = (r-1)(r^2 - 4r + 3) = (r-1)^2(r-3).$$

Homogenlösningen till ekvationen ges därför av

$$y_h = (Ax + B)\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{3x}.$$

För att hitta en partikulärlösning gör vi ansatsen

$$y_p = a\cos 2x + b\sin 2x.$$

Detta ger

$$y_p' = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x,\ y_p'' = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x,\ y_p''' = 8a\sin 2x - 8b\cos 2x.$$

Insatt i ekvationen ger detta

$$y_p''' - 5y_p'' + 7y_p' - 3y_p = \ldots = (17a + 6b)\cos 2x + (17b - 6a)\sin 2x = 17\cos 2x - 6\sin 2x,$$

vilket ger lösningen $a = 1, b = 0$. D.v.s. $y_p = \cos 2x$.

Svar: $y = y_h + y_p = (Ax + B)\mathrm{e}^x + C\mathrm{e}^{3x} + \cos 2x$.

5. (a) Rotkriteriet ger

$$\left|\frac{(-1)^k k^2 x^{2k}}{9^k}\right|^{1/k} = \frac{k^{2/k}|x|^2}{9} \to \frac{|x|^2}{9} \text{ då } k \to \infty.$$

Konvergensradien ges nu av att $\frac{|x|^2}{9} < 1 \Leftrightarrow |x| < 3$ (d.v.s. konvergensradien är 3).

I ändpunkterna $x = \pm 3$ får vi serien $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^2$. Eftersom termerna i denna serie inte går mot noll då $k \to \infty$ är serien divergent.

Svar: $-3 < x < 3$.

(b) Vi vet att $0 \le \sin t \le t$ om $0 \le t \le 1$. Eftersom $0 < 1/x^2 < 1$ om $1 < x < \infty$ får vi nu

$$0 \le \int_1^\infty \sin(1/x^2)\,dx \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^R = 1.$$

6.

$$\begin{gathered} y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots, \quad y(0) = c_0 = 0, \\ y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots, \quad y'(0) = c_1 = 1, \\ y'' = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \ldots, \end{gathered}$$

(där ... anger termer av högre ordning än de tidigare termerna). Vidare har vi att

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots.$$

Alltså får vi, om vi sätter in $c_0 = 0$ och $c_1 = 1$ i formeln för y,

$$\begin{gathered} y'' + y\cos x = (2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + \ldots) + (x + c_2x^2 + \ldots)(1 - \frac{x^2}{2} + \ldots) = \\ = 2c_2 + (6c_3 + 1)x + (12c_4 + c_2)x^2 + \ldots = x^2. \end{gathered}$$

Detta ger att $2c_2 = 0$, $6c_3 + 1 = 0$, $12c_4 + c_2 = 1$, vilket ger $c_2 = 0$, $c_3 = -1/6$ samt $c_4 = 1/12$.

Svar: $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = -1/6$ samt $c_4 = 1/12$.

7. $\mathrm{e} = 5/2 + \mathrm{e}^\xi/6 \Leftrightarrow \mathrm{e}^\xi = 6\mathrm{e} - 15$. Eftersom $6\mathrm{e} - 15 > 6 \cdot 2{,}71 - 15 = 1{,}26$ och vi vet att e^ξ är inverterbar på $]-\infty, \infty[$, där inversen ln är definierad på $]0, \infty[$ får vi nu att

$$\xi = \ln(6\mathrm{e} - 15).$$

Vi Maclaurinutvecklar nu $g(t) = \ln(1 + t)$ till ordning 1 med Lagranges restterm.

$g'(t) = (1 + t)^{-1}$ och $g''(t) = -(1 + t)^{-2}$ ger att

$$\ln(1 + t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(s)}{2}t^2 = t + \frac{g''(s)}{2}t^2 = t - \frac{1}{2(1 + s)^2}t^2,$$

för något s mellan 0 och t.

Med

$$\eta = 6\mathrm{e} - 16$$

gäller (då $2{,}71 < \mathrm{e} < 2{,}72$) att $0{,}26 \le \eta \le 0{,}32$.

Vi har nu

$$\xi = \ln(6\mathrm{e} - 15) = \ln(1 + \eta) = \eta - \frac{\eta^2}{2(1 + \mathrm{s})^2},$$

för något s mellan 0 och η. Alltså får vi, eftersom $s \ge 0$,

$$|\xi - \eta| = |\ln(1 + \eta) - \eta| = \left|-\frac{\eta^2}{2(1 + s)^2}\right| \le \frac{1}{2}\eta^2 \le \frac{1}{2} \cdot (0{,}32)^2 = 0{,}0512.$$

Så med

$$a = 0{,}26 - 0{,}0512 = 0{,}2088 = \frac{261}{1250} \text{ och } b = 0{,}32 + 0{,}0512 = 0{,}3712 = \frac{232}{625}$$

gäller

$$b - a = 0{,}1624 < 0{,}2$$

och

$$a < \xi < b.$$

Svar: $a = \frac{261}{1250}$ och $b = \frac{232}{625}$ duger t.ex.