

Tentamen i Envariabelanalys 2

2019-10-30 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

- Lös $xy' - 2y = x^3 \cos x$, $y(\pi) = \pi^3$, $x > 0$.
- (a) Området som ges av olikheterna $-1 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2 - x^2$ roteras ett varv kring x -axeln. Beräkna rotationskroppens volym. För full poäng krävs en principskiss som motiverar formeln som används. (2p)
(b) Beräkna längden av kurvan $\begin{cases} x(t) = \cos t + t \sin t, \\ y(t) = \sin t - t \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1p)$
- Låt $f(x) = \cos(e^x - 1)$.
 - Bestäm Maclaurinutvecklingen av ordning 3 till $f(x)$ med restterm $\mathcal{O}(x^4)$.
 - Använd resultatet i (a) för att beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(e^x - 1) - 1 + x^2/2}{x^3}$.
 - Använd resultatet i (a) för att avgöra om $f(x)$ har ett lokalt extremvärde i $x = 0$ (och ange i så fall vilken typ).
- Bestäm den allmänna lösningen till $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 17 \cos 2x - 6 \sin 2x$.
- (a) Avgör för vilka reella x som potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^2 x^{2k}}{9^k}$ konvergerar. (2p)
(b) Visa att $0 \leq \int_1^{\infty} \sin(1/x^2) dx \leq 1$. (1p)
- Bestäm c_0, c_1, c_2, c_3 och c_4 om $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ löser $y'' + y \cos x = x^2$ med $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$.
- Om $f(x) = e^x$ så följer det av Taylors sats med Lagranges restterm att det finns minst ett ξ mellan 0 och 1 sådant att

$$e = f(1) = \frac{5}{2} + \frac{e^\xi}{6}.$$

Visa att det i detta fall finns exakt ett sådant ξ , och bestäm även rationella tal a, b sådana att $0 \leq a \leq \xi \leq b \leq 1$ med $b - a \leq 0,2$. (Att $2,71 < e < 2,72$ får användas utan motivering.)