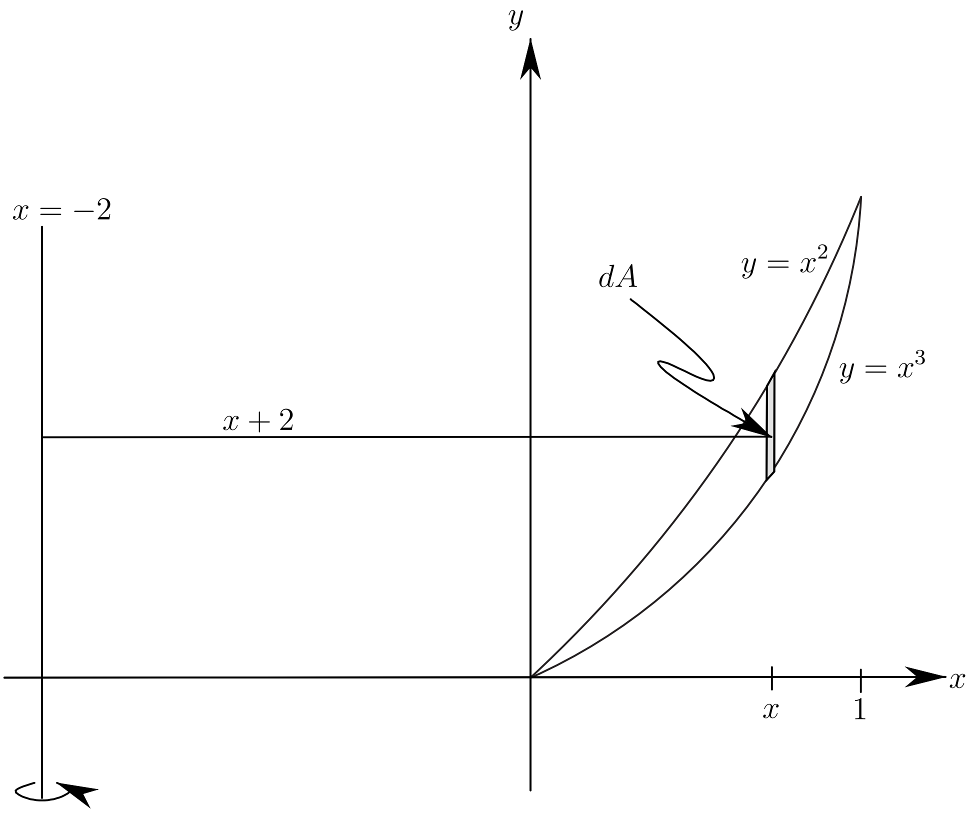
Lösningsförslag till TATA42, Envariabelanalys, del 2, 2019–08–29

1. För $x < 0$ och $x > 1$ blir området mellan kurvorna obegränsat. Den begränsade delen är alltså för x mellan 0 och 1 och där är $x^2 \geq x^3$. Vi får följande figur (ej skalenlig):



Ur ovanstående avläser vi

$$\text{Tyngdpunktens avstånd till rotationsaxeln} = x + 2, \quad dA = (x^2 - x^3)dx.$$

Med hjälp av Pappos-Guldins regel fås sedan

$$dV = \text{Tyngdpunktens väg} \cdot dA = 2\pi(x+2)(x^2 - x^3)dx = 2\pi(2x^2 - x^3 - x^4)dx$$

$$V = \int dV = 2\pi \int_0^1 (2x^2 - x^3 - x^4)dx = 2\pi \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 =$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 2\pi\frac{40 - 15 - 12}{60} = \frac{13\pi}{30}.$$

Svar: : Rotationskroppens volym $= \dfrac{13\pi}{30}$.

2. (a) Börja med att sätta på gemensamt bråk och Maclaurinutveckla därefter de ingående funktionerna:

$$\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x) - \arctan x}{\ln(1+x)\arctan x} =$$

$$= \frac{\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right) - \left(x + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right)}{\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right)\left(x + \mathcal{O}\left(x^3\right)\right)} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right)}{x^2\left(1 + \mathcal{O}(x)\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(x^2\right)\right)} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)}{\left(1 + \mathcal{O}(x)\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(x^2\right)\right)} \to -\frac{1}{2}$$

då $x \to 0$.

(b) Börjar med att sätta $1/x = t$ så att $t \to 0^+$ då $x \to \infty$. Använd sedan standard-utvecklingarna.

$$xe^{1/x} - x^2 \sin\frac{1}{x} = \left[t = \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{t^2}(te^t - \sin t) =$$

$$= \frac{1}{t^2}\left(t\left(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^3)\right) - \left(t + \mathcal{O}(t^3)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{t^2}\left(t^2 + \mathcal{O}(t^3)\right) = 1 + \mathcal{O}(t) \to 1$$

då $t \to 0^+$ $\left(x = \frac{1}{t} \to \infty\right)$.

(c) Då $x \to 0$ är det x^4-termen som dominerar i nämnaren. Standardutvecklingar till ordning 4 blir då

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}(x^6)\,,$$

$$\sqrt{1 - x^2} = \left[t = -x^2\right] = (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t + \binom{1/2}{2}t^2 + \mathcal{O}(t^3) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(-x^2\right) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!}\left(-x^2\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(-x^2\right)^3\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \mathcal{O}(x^6)\,,$$

$$\cos x - \sqrt{1 - x^2} = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \mathcal{O}(x^6)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \mathcal{O}(x^6)\right) =$$

$$= \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{8}x^4 + \mathcal{O}(x^6) = \frac{4}{24}x^4 + \mathcal{O}(x^6) = \frac{1}{6}x^4 + \mathcal{O}(x^6)\,,$$

$$\frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{x^4 + x^7} = \frac{\frac{1}{6}x^4 + \mathcal{O}(x^6)}{x^4(1 + x^3)} = \frac{\frac{1}{6} + \mathcal{O}(x^2)}{1 + x^3} \to \frac{1}{6}$$

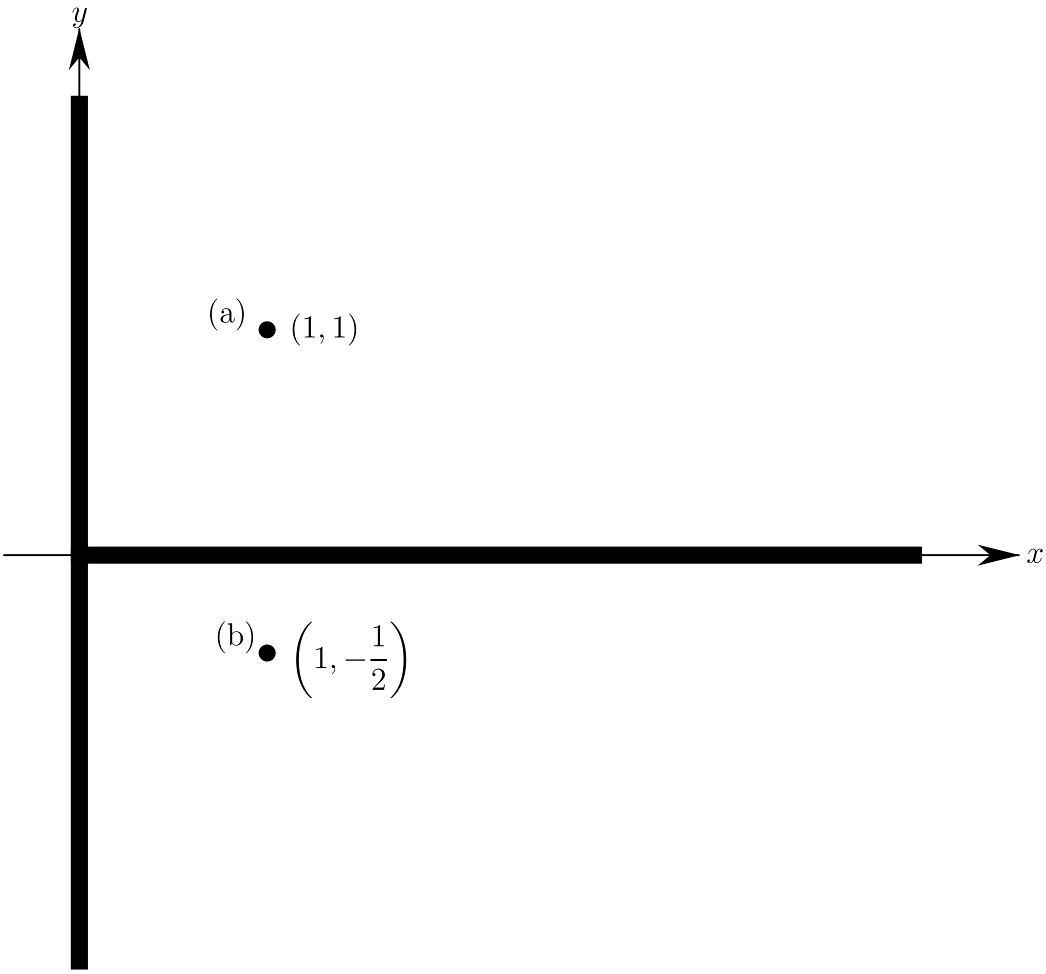
då $x \to 0$.

Svar: (a) $-\frac{1}{2}$, (b) 1, (c) $\frac{1}{6}$.

3. Ekvationen är separabel ty

$$x^2y' = y^3,\ x > 0 \iff \begin{cases} \dfrac{y'}{y^3} = \dfrac{1}{x^2}, & x > 0,\ y \neq 0 \\ \text{eller} & \\ y = 0, & \text{för alla } x > 0 \end{cases}$$

Studera nedanstående figur:



De "fetlagda" koordinataxlarna är tänkta att indikera de naturliga avgränsningar som lösandet av ekvationen berörs av. Eftersom den konstanta lösningen inte är aktuell vare sig i fall (a) eller (b) antar vi fortsättningsvis att $y \neq 0$ och $x > 0$. Vi får

$$\frac{y'}{y^3} = \frac{1}{x^2} \iff \int \frac{dy}{y^3} = -\frac{1}{2y^2} = -\frac{1}{x} + C. \tag{1}$$

(a) Att kurvan går genom punkten $(1, 1)$ innebär att $y(1) = 1$ vilket insatt i (1) ger

$$-\frac{1}{2(y(1))^2} = -\frac{1}{2 \cdot 1^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{1} + C = \underline{\underline{C - 1}} \iff C = \frac{1}{2}$$

vilket ger

$$-\frac{1}{2y^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \iff \frac{1}{y^2} = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2 - x}{x} \iff y = \pm\sqrt{\frac{x}{2 - x}}.$$

Eftersom $y(1) = 1 > 0$ följer det att $y = \sqrt{\dfrac{x}{2 - x}}$. Det största delintervall av $x > 0$ som innehåller $x = 1$ och där detta uttryck är definierat blir då det intervall där uttrycket under rot-tecknet är positivt, d v s lösningen är

$$y = \sqrt{\frac{x}{2 - x}}, \quad 0 < x < 2.$$

(b) Att kurvan går genom punkten $\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$ innebär att $y(1) = -\dfrac{1}{2}$ vilket insatt i (1) ger

$$-\frac{1}{2(y(1))^2} = -\frac{1}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \underline{\underline{-2}} = -\frac{1}{1} + C = \underline{\underline{C-1}} \iff C = -1$$

vilket ger

$$-\frac{1}{2y^2} = -\frac{1}{x} - 1 = -\frac{x+1}{x} \iff y^2 = \frac{x}{2x+2} \iff y = \pm\sqrt{\frac{x}{2x+2}}.$$

Eftersom $y(1) = -\dfrac{1}{2} < 0$ följer det att $y = -\sqrt{\dfrac{x}{2x+2}}$. För att detta uttryck skall vara definierat krävs att uttrycket under rot-tecknet är positivt vilket det är för alla $x > 0$. Då $x = 1$ ingår i detta intervall blir lösningen

$$y = -\sqrt{\frac{x}{2x+2}}, \quad x > 0.$$

Svar: (a) $y = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$, $\quad 0 < x < 2$, $\qquad$ (b) $y = -\sqrt{\dfrac{x}{2x+2}}$, $\quad x > 0$.

4. (a) Då $1/k^3 \to 0$ då $k \to \infty$ kan vi använda Maclaurinutveckling vilket ger

$$0 \le a_k = \ln\left(1 + \frac{1}{k^3}\right) = \frac{1}{k^3} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{k^3}\right)^2\right) = \underbrace{\frac{1}{k^3}}_{b_k}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{a_k}{b_k} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right) \to 1$$

då $k \to \infty$. Då $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ är konvergent ($\alpha = 3 > 1$) enligt känd sats ger jämförelse på kvotform (jämförelsesats II) att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent.

(b) Eftersom $0 < x + \cos^2 x \le x + 1$ på $x \ge 1$ följer

$$\frac{1}{x + \cos^2 x} \ge \frac{1}{x+1} > 0 \quad \text{och} \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x+1} = \lim_{R\to\infty} \Big[\ln(x+1)\Big]_1^R = \infty.$$

Då integralen av jämförelsefunktionen är divergent ger jämförelsesatsen att

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \cos^2 x}$$

är divergent ("Om integralen av den mindre är divergent så är integralen av den större det också").

(c) Vi använder rotkriteriet på hela termen. Då $8^k \geq 4^k$ fås

$$\sqrt[k]{\left|\frac{x^{3k}}{4^k+8^k}\right|} = |x|^3 \left(\frac{1}{8^k\left(1+\left(\frac{4}{8}\right)^k\right)}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{|x|^3}{8}\left(1+2^{-k}\right)^{-\frac{1}{k}} =$$
$$= \frac{|x|^3}{8} e^{-\frac{1}{k}\ln(1+2^{-k})} \to \frac{|x|^3}{8}$$

då $k \to \infty$. Rotkriteriet ger då att serien är absolutkonvergent då

$$\frac{|x|^3}{8} < 1 \iff |x| < 2$$

och divergent då $|x| > 2$, d v s konvergensradien är 2.

Svar: (a) Konvergent, (b) divergent, (c) konvergensradien är 2.

5. Vi börjar med att observera att integralen är 0 för $x = \pi$ oavsett vilken (integrerbar) funktion vi har som $y(t)$. Insättning av $x = \pi$ i ekvationen ger därför

$$y'(\pi) + \int_\pi^\pi y(t)\,dt = y'(\pi) = \pi^3.$$

Då derivatan av integralen är integranden (Analysens huvudsats) ger derivering av ekvationen

$$D\left(y'(x) + \int_\pi^x y(t)\,dt\right) = y''(x) + y(x) = D\left(x^3\right) = 3x^2$$

vilket är en andra ordningens ordinär differentialekvation med konstanta koefficienter. Vi söker den lösning till ekvationen för vilken

$$y(0) = 0 \text{ (givet i uppgiften) och } y'(\pi) = \pi^3 \text{ (enligt ovan).}$$

Lösning av den karakterisitiska ekvaionen ger

$$P(r) = r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm i \iff y_h = A\cos x + B\sin x.$$

Eftersom

$$P(D)(\text{polynom av grad } n) = \text{polynom av grad } n$$

och vi har $3x^2$ i högerledet ansätter vi

$$y_p = ax^2 + bx + c \Longrightarrow y_p' = 2ax + b \Longrightarrow y'' = 2a$$

som insatt i ekvationen ger

$$P(D)y_p = y_p'' + y_p = 2a + (ax^2 + bx + c) = ax^2 + bx + (2a + c) = 3x^2 \iff$$
$$\iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -6 \end{cases} \iff y_p = 3x^2 - 6 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow y = y_h + y_p = A\cos x + B\sin x + 3x^2 - 6.$$
$$y(0) = 0 \Longrightarrow A\cos 0 + B\sin 0 + 3{\cdot}0^2 - 6 = A - 6 = 0 \iff A = 6.$$

Då derivatan av $y(x)$ är $y'(x) = -6\sin x + B\cos x + 6x$ ger insättning av $x = \pi$

$$y'(\pi) = -6\sin\pi + B\cos\pi + 6\pi = 6\pi - B = \pi^3 \iff B = 6\pi - \pi^3$$

så att

$$y = 6\cos x - \pi(\pi^2 - 6)\sin x + 3x^2 - 6.$$

Svar: $y = 6\cos x - \pi(\pi^2 - 6)\sin x + 3x^2 - 6$

6. Insättning av $x = 0$ i i ekvationen ger att

$$e^{0\cdot y(0)} = e^0 = 1 = 0 + y(0) \iff y(0) = 1$$

Eftersom den sökta funktionen $y(x)$ är deriverbar godtyckligt många gånger har den en maclaurinutveckling av vilken ordning vi önskar. I detta fall sökte vi utvecklingen av ordning 2 med restterm $\mathcal{O}(x^3)$. Det betyder att

$$y(x) = 1 + ax + bx^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

eftersom $y(0) = 1$. Insättning av denna utveckling i ekvationen ger

$$\begin{aligned}
e^{xy(x)} &= e^{x(1+ax+bx^2+\mathcal{O}(x^3))} = e^{x+ax^2+\mathcal{O}(x^3)} = \\
&= 1 + \left(x+ax^2+\mathcal{O}(x^3)\right) + \frac{1}{2}\left(x+ax^2+\mathcal{O}(x^3)\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(x+ax^2+\mathcal{O}(x^3)\right)^3\right) = \\
&= 1 + x + ax^2 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3) = 1 + x + \left(a + \frac{1}{2}\right)x^2 + \mathcal{O}(x^3)\,, \\
x + y(x) &= x + \left(1 + ax + bx^2 + \mathcal{O}(x^3)\right) = 1 + (1+a)x + bx^2 + \mathcal{O}(x^3)\,.
\end{aligned}$$

Dessa uttryck skall vara lika för alla x i en omgivining av $x = 0$, d v s de är båda två maclaurinutvecklingar av samma funktion. Entydigheten hos maclaurinutvecklingen ("har vi hittat nåt som approximerar lika bra som maclaurinpolynomet så är det maclaurinpolynomet vi hittat") ger då att koefficienterna i respektive utveckling är lika, d v s

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{x}}: &\quad 1 = 1 + a \iff a = 0 \\
\underline{\underline{x^2}}: &\quad a + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = b
\end{aligned}$$

så att

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)\,.$$

För att avgöra om $y(x)$ har extremvärde konstaterar vi

$$y(x) = 1 + \underbrace{x^2}_{\geq 0}\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \mathcal{O}(x)\right)}_{>0} \geq 1$$

om x är tillräckligt litet eftersom $\mathcal{O}(x) \to 0$ då $x \to 0$, d v s $y(x)$ har lokalt minimum i $x = 0$.

Svar: $y(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ och $y(x)$ har lokalt minimum i $x = 0$.

7. Vi börjar med att skriva ut några termer.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{14k-27}{k^3+k} = \frac{1}{10} + \frac{15}{30} + \frac{29}{68} + \frac{43}{130} + \dots$$

så *hela* följden av termer är inte en avtagande följd. Vill vi kunna uppskatta summan med integral på vanligt sätt måste vi alltså avgöra från och med vilket index k den är avtagande. För att avgöra detta gör vi ett funktionsstudium som i Envariabelanalys, del1.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{14x-27}{x^3+x} \implies \\
\implies f'(x) &= \frac{14(x^3+x)-(14x-27)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2} = \\
&= \frac{14x^3+14x-52x^3+81x^2-14x+27}{(x^3+x)^2} = \frac{-28x^3+81x^2+27}{(x^3+x)^2} = \\
&= \frac{-28x^3+27(3x^2+1)}{(x^3+x)^2} = 0.
\end{aligned}$$

Prövning med $x = 3$ ger

$$f'(3) = \frac{-28{\cdot}3^3+27(3{\cdot}3^2+1)}{(3^3+3)^2} = \frac{27(-28+27+1)}{(3^3+3)^2} = 0.$$

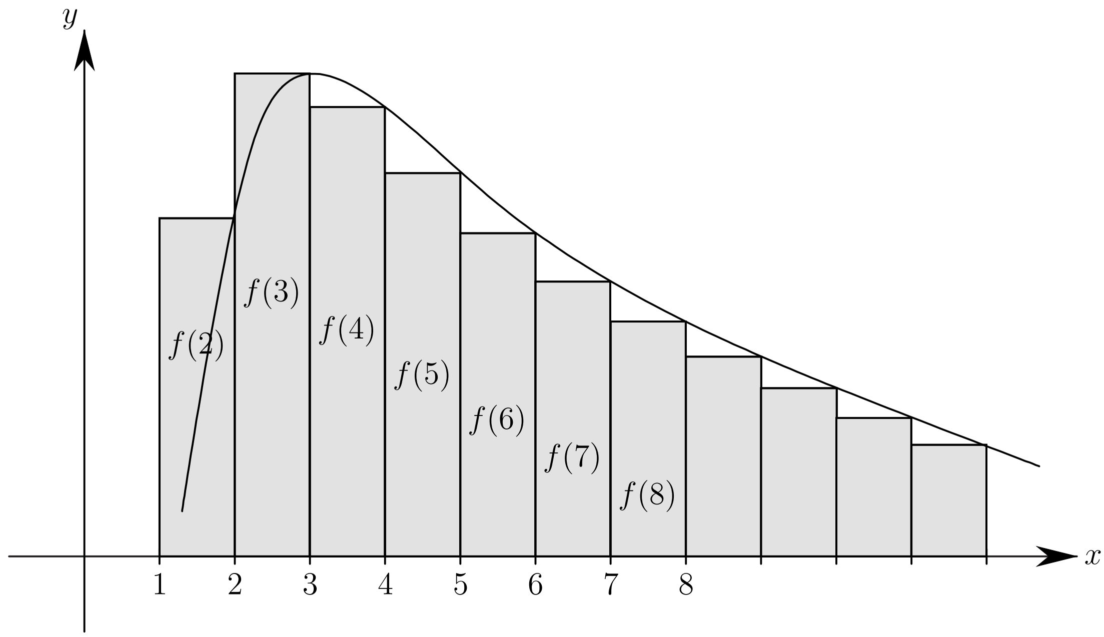
Faktorsatsen ger då att $x-3$ är en faktor i $-28x^3+81x^2+27$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
-28x^2 & -\ 3x & -\ 9 & & \\
\hline
-28x^3 & +\ 81x^2 & +\ 0{\cdot}x & +\ 27 & x-3 \\
\cline{5-5}
-28x^3 & +\ 84x^2 & & & \\
\cline{1-2}
 & -\ 3x^2 & & & \\
 & -\ 3x^2 & +\ 9x & & \\
\cline{2-3}
 & & -\ 9x & +\ 27 & \\
 & & -\ 9x & +\ 27 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array},$$

d v s $f'(x) = -28x^3+81x^2+27 = -(x-3)(28x^2+3x+9)$. Eftersom $28x^2+3x+9 \geq 9$ om $x \geq 0$ följer det att $f'(x) < 0$ för $x > 3$, d v s f är avtagande för $x \geq 3$. Vi tar ut de första två termerna i summan och försöker sedan uppskatta den resterande summan med integral.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{14k-27}{k^3+k} = \frac{1}{10} + \frac{15}{30} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{14k-27}{k^3+k} = \frac{3}{5} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{14k-27}{k^3+k}.$$

Vi fortsätter nu med att rita standardfiguren med kurvan $y = f(x)$ och staplar med area $f(k)$.



Ur figuren utläser vi nu att

$$\frac{3}{5}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{14k-27}{k^3+k}\leq\frac{3}{5}+\int_3^{\infty}\frac{14x-27}{x^3+x}dx.$$

Partialbråksuppdelning och beräkning av integralen ger

$$\begin{aligned}\int_3^{\infty}\frac{14x-27}{x^3+x}dx &= \int_3^{\infty}\left(\frac{27x}{x^2+1}+\frac{14}{x^2+1}-\frac{27}{x}\right)dx = \\ &= \left[\frac{27}{2}\ln\left(x^2+1\right)+14\arctan x-27\ln x\right]_3^{\infty} = \\ &= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{27}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2}+14\arctan x\right]_3^R = 7\pi-14\arctan 3-\frac{27}{2}\ln\frac{10}{9}.\end{aligned}$$

Detta är en utmärkt approximation $\approx 3,08$, skiljer bara c:a 0,28 mot verkliga värdet. Det är dock mycket svårt att utan miniräknare uppskatta hur stort detta är och det är det som är uppgiften. Vi måste därför försämra approximationen lite grann på ett sätt som gör att vi kan hitta en rationell och tillräckligt bra approximation. Prövning visar att det funkar att stryka x:et i nämnaren (mindre nämnare $\Longrightarrow$ större kvot);

$$\begin{aligned}\int_3^{\infty}\frac{14x-27}{x^3+x}dx &\leq \int_3^{\infty}\frac{14x-27}{x^3}dx=\int_3^{\infty}\left(\frac{14x}{x^2}-\frac{27}{x^3}\right)dx=\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{14}{x}+\frac{27}{2x^2}\right]_3^R= \\ &= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{14}{R}+\frac{27}{2R^2}\right)+\frac{14}{3}-\frac{27}{18}=\frac{14}{3}-\frac{3}{2}=\frac{28-9}{6}=\frac{19}{6}\end{aligned}$$

vilket ger

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{14k-27}{k^3+k}=\frac{3}{5}\sum_{k=4}^{\infty}\frac{14k-27}{k^3+k}\leq\frac{3}{5}+\frac{19}{6}=\frac{18+95}{30}=\frac{113}{30}<\frac{120}{30}=4. \qquad \text{V.S.B.}$$