Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Utbildningskod: TATA42
Modul: TEN1

Tentamen i Envariabelanalys 2

2019-08-29 kl 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Lösningarna ska vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar.

Varje uppgift bedöms som godkänd eller underkänd. Godkända uppgifter ger sedan 2 eller 3 poäng medan underkända ger 0 eller 1 poäng. För betyg 3/4/5 räcker 3/4/5 godkända uppgifter och 8/12/16 poäng.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

1. Det begränsade område som avgränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = x^3$ roteras ett varv kring linjen $x = -2$. Beräkna rotationskroppens volym.

   För full poäng krävs en principskiss som motiverar formeln som används.

2. Beräkna följande gränsvärden:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1}{\arctan x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}\Big)$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(xe^{1/x} - x^2 \sin\dfrac{1}{x}\Big)$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4+x^7}$

3. Betrakta differentialekvationen $x^2 y' = y^3$, $x > 0$.

   (a) Bestäm den lösning $y(x)$ som går genom punkten $(1, 1)$. Ange också största möjliga (del)intervall av $]0, \infty[$ där lösningen existerar.

   (b) Som (a), men för den lösning som går genom punkten $(1, -1/2)$.

4. (a) Avgör konvergens: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\Big(1 + \frac{1}{k^3}\Big)$ (b) Avgör konvergens: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x + \cos^2 x}$

   (c) Bestäm konvergensradien R för potensserien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{4^k + 8^k}$.

   (Konvergensintervallets eventuella ändpunkter behöver alltså inte undersökas.)

5. Bestäm alla funktioner $y(x)$ sådana att $y'(x) + \displaystyle\int_{\pi}^{x} y(t)\,dt = x^3$ och $y(0) = 0$.

6. Funktionen $y(x)$ är kontinuerligt deriverbar godtyckligt många gånger i ett intervall kring $x = 0$ och satisfierar där ekvationen

   $$e^{xy} = x + y.$$

   Bestäm Maclaurinutvecklingen av $y(x)$, med rest $\mathcal{O}(x^3)$. Har $y(x)$ lokalt extremvärde i $x = 0$, och i så fall vilken typ?

7. Visa att $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{14k - 27}{k^3 + k} < 4$.

   Även en uppskattning med ett större heltal än 4 kan ge poäng.