Lösningsförslag envariabelanalys 2 2019-06-05

1. Ekvationen är linjär och har det karakteristiska polynomet

$$p(r) = r^4 + 2r^3 + 5r^2 = r^2(r^2 + 2r + 5) = r^2(r + 1 - 2i)(r + 1 + 2i).$$

Således ges lösningarna till den homogena ekvationen $p(D)y_h = 0$ av

$$y_h = C_1 + C_2 x + e^{-x}\left(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x\right)$$

enligt känd sats. För att hitta partikulärlösningar utnyttjar vi superpositionsprincipen och hittar först en lösning till

$$p(D)y_{p_1} = 8e^x.$$

Eftersom $r = 1$ inte är en rot till $p(r)$ så försöker vi med ansatsen $y_{p_1} = Ae^x$. Direkt derivering visar att

$$p(D)(Ae^x) = Ae^x + 2Ae^x + 5Ae^x = 8Ae^x,$$

så om vi låter $A = 1$ gör det att högerledet blir $8e^x$. Givetvis kan vi ansätta $y_{p_1} = z(x)e^x$ istället och använda förskjutningssatsen (eller derivera på likt ovan) istället.

För att hitta en partikulärlösning till

$$p(D)y_{p_2} = 10$$

ansätter vi $y_{p_2} = Bx^2$ eftersom $p(D)(\text{polynom}) = \text{polynom}$, där högerledet har gradtal två steg lägre (om vi ansätter ett polynom med grad ≥ 2). Insatt i ekvationen ger detta

$$p(D)(Bx^2) = 10B,$$

så $B = 1$.

Svar: $y = C_1 + C_2 x + e^{-x}\left(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x\right) + e^x + x^2$.

2. (a) Standardutvecklingarna

$$(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}t^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{6}t^3 + O(t^4) = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + O(t^4)$$

och

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + O(u^5) \quad \text{samt} \quad \cos(v) = 1 - \frac{v^2}{2} + O(v^4)$$

visar att, med $u = 2x^2$ och $t = \sin u$ samt $v = x^2$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1 + \sin(2x^2)\right)^{1/2} - x^2 + 1 \\
&= \left(1 + 2x^2 - \frac{(2x^2)^3}{3!} + O(x^{10})\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)\right) - x^2 + 1 \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(2x^2 - \frac{(2x^2)^3}{3!} + O(x^{10})\right) - \frac{1}{8}\left(2x^2 + O(x^6)\right)^2 + \frac{1}{16}\left(2x^2 + O(x^6)\right)^3 \\
&\quad - \left(1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)\right) - x^2 + 1 \\
&= -\frac{2x^6}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} + 1 + \frac{x^4}{2} + O(x^8) \\
&= 1 - \frac{x^6}{6} + O(x^8).
\end{aligned}$$

(b) Eftersom

$$f(x) = 1 + x^6 \left(-\frac{1}{6} + O(x^2) \right)$$

så ser vi att för x nära 0 så gäller att $f(x) < 1 = f(0)$ om $x \neq 0$ eftersom $x^6 > 0$ så $x^6 \left(-\frac{1}{6} + O(x^2) \right) < 0$ för $x \neq 0$ (små x). Således har $f(x)$ ett lokalt maximum då $x = 0$.

Svar: (a) $1 - \frac{x^6}{6} + O(x^8)$ (b) Ett lokalt maximum.

3. Enligt känd formel för plan area i polära koordinater erhåller vi

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} r(\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - \cos 2\varphi) \, d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

Kurvlängden får vi genom att summera bågelementen ds som i polära koordinater ges av

$$ds(\varphi) = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} \, d\varphi = \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} \, d\varphi = d\varphi.$$

Sålunda ges längden av

$$L = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} ds(\varphi) = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} d\varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Svar: $A = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ respektive $L = \frac{2\pi}{3}$.

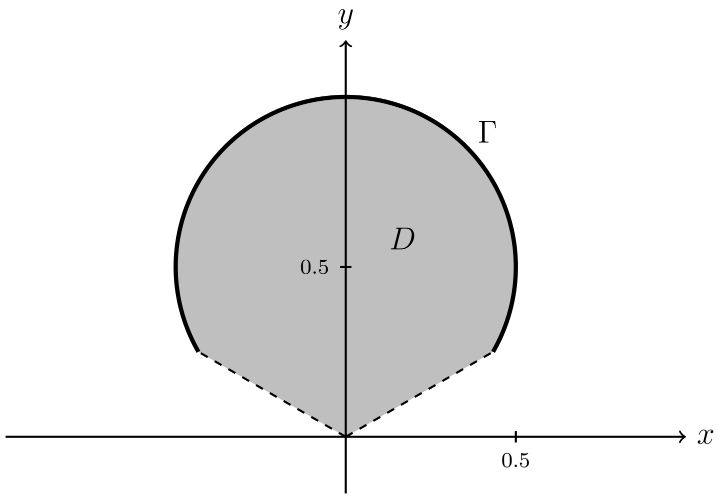
Notera att bågelementet ds i polära koordinater ges av

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} d\varphi = \Big/ \; x = r(\varphi) \cos \varphi, \; y = r(\varphi) \sin \varphi \; \Big/ \\ &= \cdots = \sqrt{r(\varphi)^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \end{aligned}$$

Vidare kan det vara intressant att $r = \sin \varphi$ definierar en cirkel med radie 1/2 och centrum i $(0, 1/2)$, något som vi kan se eftersom $x = r \cos \varphi = \sin \varphi \cos \varphi$ och $y = r \sin \varphi = \sin^2 \varphi$, så

$$\begin{aligned} x^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 &= \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi - \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} \\ &= \sin^2 \varphi \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right) - \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} = \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

vilket visar att objektet är en (del av en) cirkel med radie $1/2$ och centrum i $(0, 1/2)$.



4. Integranden är positiv och då $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$ så är integralen generaliserad i både 1 och ∞. Låt oss dela upp integralen i två delar:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-x}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3-x}}\,dx + \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-x}}\,dx. \tag{1}$$

Vi ser direkt att

$$\frac{1}{\sqrt{x^3-x}} = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

för $1 \le x \le 2$, så

$$0 \le \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3-x}}\,dx \le \frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx < \infty$$

enligt den första jämförelsesatsen då den sista integralen är känt konvergent:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \left[2\sqrt{x-1}\right]_1^2 = 2.$$

På liknande sätt ser vi att

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{x^3-x}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}} \le \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{x^{3/2}}, \quad 2 \le x < \infty,$$

så

$$0 \le \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3-x}}\,dx \le \frac{2}{\sqrt{3}}\int_2^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx < \infty$$

enligt den första jämförelsesatsen, även här på grund av att den sista integralen är känt konvergent.

Eftersom båda integralerna i högerledet av (1) är konvergenta så måste även integralen i vänsterledet vara konvergent.

Svar: Konvergent.

5. Vi ansätter en potensserie

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

med konvergensradie $R > 0$. Då gäller att

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(k+1)x^k$$

samt

$$2xy(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2c_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}x^k.$$

Alltså måste

$$1 = y' - 2xy = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{k+1}(k+1) - 2c_{k-1}\right) x^k.$$

Eftersom koefficienterna är entydiga så innebär detta att $c_1 = 1$ samt att

$$c_{k+1}(k+1) - 2c_{k-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_{k+1} = \frac{2c_{k-1}}{k+1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Villkoret att $y(0) = 0$ ger att $c_0 = 0$, vilket resulterar i att

$$c_2 = c_4 = c_6 = \cdots = 0.$$

För udda index ser vi att

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_3 &= \frac{2c_1}{3} = \frac{2}{3} \\ c_5 &= \frac{2c_3}{5} = \frac{2^2}{3 \cdot 5} \\ c_7 &= \frac{2c_7}{7} = \frac{2^3}{3 \cdot 5 \cdot 7} \\ &\vdots \\ c_{2k+1} &= \frac{2^k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)}. \end{aligned}$$

Svaret ges alltså av serien

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}$$

då de jämna termerna försvinner. Här är c_{2k+1} koefficienterna vi bestämde ovan. Konvergensradien kan vi enklast finna medelst kvottestet:

$$\left| \frac{c_{2(k+1)+1} x^{2(k+1)+1}}{c_{2k+1} x^{2k+1}} \right| = \left| \frac{c_{2k+3}}{c_{2k+1}} \right| |x|^2 = \left| \frac{2}{2k+3} \right| |x|^2 \to 0,$$

där vi använde rekursionsformeln

$$\frac{c_{k+1}}{c_{k-1}} = \frac{2}{k+1}$$

som vi härledde ovan. Konvergensradien är således oändlig.

Svar: $y(x) = x + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{4x^5}{15} + \dfrac{8x^7}{105} + \cdots$, $R = \infty$.

Notera att vi kan hyfsa till uttrycket för koefficienterna genom att "fylla igen" hålen som dyker upp vid de jämna heltalen. Vi förlänger således med $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k = 2^k\, k!$, så

$$c_{2k+1} = \frac{2^k\, 2^k\, k!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2k \cdot (2k+1)} = \frac{4^k\, k!}{(2k+1)!}$$

för $k = 0, 1, 2, \ldots$ Svaret ges alltså av serien

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k\, k!\, x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Observera att vi även kan hitta ett annat uttryck för lösningen genom att multiplicera med den integrerande faktorn e^{-x^2}:

$$y' - 2xy = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} y\right) = e^{-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + Ce^{x^2}.$$

Med villkoret $y(0) = 0$ så ser vi att $C = 0$. Alltså måste

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k\, k!\, x^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Vad händer om vi Maclaurinutvecklar integranden och e^{x^2}?

6. Vi vet att

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + r(t),$$

där

$$r(t) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} t^{n+1}$$

och ξ är mellan 0 och t. Alltså måste

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + r(-x^2),$$

där

$$r(-x^2) = (-1)^{n+1} \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{2n+2}$$

och ξ är mellan 0 och $-x^2$. Vi kommer integrera över intervallet $-1 \le x \le 1$, så ξ är alltså mellan 0 och -1. Därmed blir

$$|r(-x^2)| = \left| (-1)^{n+1} \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{2n+2} \right| \le \frac{1}{(n+1)!} |x|^{2n+2}, \quad -1 \le x \le 1.$$

Hur många termer är nödvändiga? Svaret får vi genom att undersöka vad som händer när vi integrerar resttermen:

$$\left| \int_{-1}^{1} r(-x^2)\, dx \right| \le \int_{-1}^{1} |r(-x^2)|\, dx \le \frac{1}{(n+1)!} \int_{-1}^{1} |x|^{2n+2}\, dx = \frac{2}{(n+1)!\,(2n+3)}.$$

Genom att testa ser vi att $n = 3$ gör att

$$\left| \int_{-1}^{1} r(-x^2)\, dx \right| \leq \frac{2}{24 \cdot 9} = \frac{1}{108} < 10^{-2}.$$

Alltså kommer

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} \right) dx + R = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \right) + R = \frac{52}{35} + R,$$

där $|R| < 10^{-2}$.

Svar: $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx \approx \frac{52}{35}$.

Ett alternativ är att betrakta Maclaurinserien för integranden:

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!},$$

som har konvergensradien $R = \infty$. Vi då integrera termvis och erhåller att

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right]_{-1}^{1} \\ &= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)} = \underbrace{2\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}}_{\text{approximation}} + \underbrace{2\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}}_{\text{fel}}. \end{aligned}$$

Vi noterar att detta är en Leibniz-serie (termernas belopp avtar monotont mot noll och serien är alternerande), så

$$\left| 2\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)} \right| \leq \frac{2}{(n+1)!\,(2n+3)} \leq \frac{1}{12 \cdot 9} = \frac{1}{108} < 10^{-2}$$

om vi låter $n = 3$.

7. Eftersom $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$ för alla $t \in \mathbf{R}$ så är $e = e^1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Då alla termer är positiva så gäller då att

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} > 0$$

för alla icke-negativa heltal n. Vidare gäller att

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \right) \\ &< \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+1)(n+1)} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\, n}, \end{aligned}$$

vilket är precis vad vi ville visa.

Antag nu att e är rationell. Då finns (positiva) heltal m och n så att $e = m/n$. Om vi förlänger olikheten vi bevisat med $n!$ så ser vi att

$$0 < n! \cdot \frac{m}{n} - n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{n!}{n!\, n} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < l < \frac{1}{n}$$

för heltalet

$$l = n! \cdot \frac{m}{n} - n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = m(n-1)! - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}.$$

Då n är ett positivt heltal har visat att det finns ett heltal l så att $0 < l < 1/n$ där $1/n \leq 1$, vilket givetvis är orimligt. Alltså kan inte e vara ett rationellt tal.

Svar: Se ovan.